LA DIVISION : UNE LONGUE SOUFFRANCE (1994)

Jeanne Gabrielle Guiet

▶ **To cite this version:**

Jeanne Gabrielle Guiet. LA DIVISION : UNE LONGUE SOUFFRANCE (1994). Sciences de l'Homme et Société. UNIVERSITE PARIS 5; DEPARTEMENT DE SCIENCES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION, 1994. Français. NNT : . tel-03935209

HAL Id: tel-03935209

https://u-paris.hal.science/tel-03935209

Submitted on 11 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

NOM : GUIET
PRENOM : Jeanne

UNIVERSITE PARIS V
DEPARTEMENT DE SCIENCES DE L'EDUCATION
ET DE LA FORMATION

TITRE DE LA THESE :

LA DIVISION : UNE LONGUE SOUFFRANCE (1994)

DIRECTEUR DE RECHERCHE : Monsieur Gérard VERGNAUD

1994 *: Doctorat de Sciences de l'Education et de la formation, Mention très honorable à l'unanimité, Université Paris 5.*
Directeur de thèse *: Vergnaud Gérard, membres du jury : Brousseau Guy (Université de Bordeaux 1, Langouët Gabriel (Université Paris 5), Gras Régis (Université de Rennes 1).*

TITRE : « La division une longue souffrance » (1994)

Résumé

Effectuer une division arithmétique est un objectif qui se heurte à des obstacles liés à l'apprentissage et à la technique opératoire de la division elle-même. L'étude présentée cherche à déterminer l'origine et la nature des erreurs les plus fréquentes, afin d'analyser les procédures utilisées par les élèves mis en situation d'effectuer des divisions. Nous étudions comment les élèves interprètent l'apprentissage de ce schème, et comment évoluent les significations relatives au sens lui-même. Notre objectif est de déterminer en quoi le choix des différentes divisions permet de contrôler les processus des élèves, et de comprendre le sens qu'ils attribuent à ces opérations. L'exploration des domaines dans lesquels s'inscrivent les concepts mathématiques sera envisagée selon la classification et la réflexion sur le sens que les enfants donnent à la connaissance de l'algorithme.

Notre étude de l'histoire de la division permet de distinguer toute une série d'obstacles épistémologiques à l'installation de cette notion : la division est un algorithme difficile, qui installe chez les enfants des schèmes résistants, et qui continue à se manifester par des erreurs, certaines, nous l'avons vu étant récurrentes. Les obstacles épistémologiques qui nous intéressent

pour l'enseignement sont ceux qui apparaissent actuellement comme inévitables : soit parce que la connaissance-obstacle est fatalement construite par l'élève au cours de son développement cognitif, ou bien parce qu'elle doit être enseignée pour servir d'appui aux connaissances futures de l'élève. L'histoire montre bien combien cette construction a été lente, difficile, et quelles ont été les résistances qu'elle a rencontrées. L'histoire nous permet d'étudier aussi les situations d'apprentissage d'enseignement actuellement. On tente ainsi d'expliciter comment le concept de division est venu jusqu'à nous, et d'où il vient, et on se fabrique une réponse plus ou moins plausible ou séduisante, mais sans savoir comment il faut s'y prendre pour obtenir une réponse vraie. Pour schématiser cet état de choses, cela montre la coexistence simultanée de plusieurs perspectives. L'histoire des mathématiques entre dans le débat afin d'éclaircir la genèse du statut dans la pensée enfantine.

TITLE : “The division : a long suffering” (1994)

Summary

Doing a division calculation is a target which comes up against obstacles linked with the meaning of the operational technique itself. This research aims to determine the origins and the nature of the most frequent mistakes in order to analyze the procedures used by pupils when they have to divide we will examine how the pupils interpret the learning of this operation. How the meanings are related themselves, and how they evolve. Our objective is to determine how the choice of different divisions makes it possible to check the mental processes of the pupils and to understand the meaning that they give to these calculations. The exploration of the areas to which the mathematical concepts belong will be done according to the classification and reflection on the meaning that the children give to their knowledge of the algorithm. Our study of the history of division allows us to distinguish a whole series of epistemological obstacles which come in the way of the establishment of this notion: division is a difficult algorithm. Which builds up strong "schemes" in children's minds, and continues to reveal itself through mistakes certain of which are recurrent. The epistemological obstacles which are of interest for teaching are those which now seem unavoidable either because the obstacle is inevitably constructed by the pupils during his cognitive development, or because it must be taught, to serve as a support for future knowledge. History shows how slow and difficult this construction has been and the resistance it has come up against. We also attempt to clarify how the concept comes from; and we’ve come up with a more or less plausible answer, without knowing how to go about finding a true answer. To simplify this situation we can say that this shows simultaneous coexistence of several perspectives.

LA THESE N'EST PAS PUBLIEE DANS CE DOCUMENT DANS SON INTEGRALITE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE----------9

PARTIE HISTORIQUE ----------17

CHAPITRE I : HISTORIQUE DE L'ALGORITHME----------18

INTRODUCTION----------21

1- LA DIVISION AVANT LES ANNEES 1000----------22

1-1 - Les processus de duplication et de médiation : les Egyptiens----------22

1-2 - Le produit de 1/a par b : les civilisations babyloniennes et sumériennes----------29

1-3 - Quelques tentatives contre le monopole des fractions sexagésimales:Diophante (Grèce)----------31

1-4 - Exemple d'une méthode de calcul chinoise----------32

1-5 - Les intermédiaires entre l'Inde et l'Occident: le renouveau apporté par les Arabes--34

2 - LA DIVISION APRES LES ANNEES 1000----------36

2-1 - La première introduction des chiffres arabes en Europe----------36

2-2 - Le Haut Moyen Age Chrétien----------37

2-3 - La division courte----------37

2-4 - La méthode de Gerbert----------38

2-5 - La division par facteurs----------40

2-6 - La méthode Galley----------41

2-7 - Les principes de quelques divisions en usage en 1711----------45

3 - PRINCIPES ET DESCRIPTIONS DE LA DIVISION ----------47

3-1 - Définition de la division----------47

3-2 - Terminologie----------48

3-3 - Le processus de division----------49

4 - PRINCIPE DES PRESENTATIONS ACTUELLES----------50

4-1 - La construction progressive de notre "longue" division----------50

4-2 - De l'origine du système sexagésimal à celui des décimaux----------60

4-3 - Abacistes contre algoristes: le calcul et ses variations----------62

4-4 - Les premières machines à calculer----------63

4-5 - Origine et évolution du zéro----------67

4-6 - Adoption de la division actuelle sous la Convention----------71

CONCLUSION----------74

CHAPITRE II : ETUDE D'ARCHIVES : CAHIERS D'ELEVES ET DE MANUELS : ou comment s'est effectué le passage de la méthode GALLEY à la méthode actuelle----------77

INTRODUCTION----------79

1 - ANALYSE DE MANUELS----------79

1-1 Analyse de manuels avant la Convention----------79

1-1-1- Livre d'arithmétique (auteur inconnu, 1700 environ)----------79

1-1-2- Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736)----------79

113- Livre d'arithmétique de Barrême (1788)----------81

1-2 Analyse de manuels après la Convention----------84

1-2-1 Cours de mathématique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine de Bezout (1798)----84

1-2-2 Extraits de cours d'instituteurs (1843)----87

2- ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES OU D'ELEVES-PROFESSEURS----89

2-1- Analyse de cahiers d'élèves avant la Convention----89

2-1-1- Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas (1761)----89

2-1-2- Cahier d'arithmétique (auteur inconnu, 1763)----91

2-2- Analyse de cahiers d'élèves après la Convention----93

2-2-1- Cahier d'arithmétique de B. Bayle de Javie (1815)----93

2-2-2- Cahier d'arithmétique de G. Bonhoure (1820)----93

2-2-3- Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud (1828)----95

2-2-4- Cahier d'arithmétique de Jean Labarthe (1855)----97

CONCLUSION----99

PLAN : PARTIE THEORIQUE----100

CHAPITRE I - SOURCES DE LA RECHERCHE----101

CHAPITRE II - EPISTEMOLOGIE ET NOTION D'OBSTACLE----107

1 - De l'erreur à l'obstacle----107

2 - Notion d'obstacle----109

3 - La division comme ensemble de schèmes du sujet----111

CHAPITRE III - PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE LA PARTIE EMPIRIQUE

1 - Introduction----115

2 - Création des épreuves - Objectif général----117

3 - Problématique et hypothèses----------118

3-1 - Problématique générale----------118

3-2 - Hypothèses----------119

4 – Méthodologie----------120

4-1 - Présentation et genèse de l'épreuve----------120

4-1-1 - L'analyse des similarités selon I.C. Lerman----------120

4-1-2 - Implication entre variables et classes de variables----------122

4-2 - Traitement informatique retenu et dépouillement----------126

CHAPITRE IV - ANALYSE A PRIORI----------128

PLAN : PARTIE EMPIRIQUE----------132

CHAPITRE I : CONTEXTE EXPERIMENTAL ET TRAITEMENT DES DONNEES----------135

1 - CHOIX ET PASSATION DE L'EPREUVE----------135

2 - PREMIERE ANALYSE : POPULATION DE 400 SUJETS----------138

3 - TRAITEMENT DES DONNEES : POPULATION DE 200 SUJETS----------142

3-1 Distribution de l'échantillon----------145

3-2 Choix des variables retenues----------147

CHAPITRE II : ANALYSES HIERARCHIQUES----------147

1- ANALYSE DES QUATRE NIVEAUX C.M.1, C.M.2, SIXIEME, CINQUIEME POUR LES REUSSITES ET LES ECHECS DES 26 DIVISIONS DES 200 SUJETS----------147

1-1 Analyse hiérarchique des similarités----------149

1-2 Analyse hiérarchique des implications entre variables----------149

2- ANALYSE PRINCIPALE---------- 151

2-1 Analyse hiérarchique des similarités----------152

2-1-1 Classe de C.M.1----------152

2-1-2 Classes de C.M.2, sixième et cinquième, prises ensemble----------157

2-1-3 Description et étude comparative de chacun des trois niveaux C.M.2, sixième, cinquième, séparément----------163

2-1-3-1 Classe de C.M.2----------163

2-1-3-2 Classe de sixième----------165

2-1-3-3 Classe de cinquième----------169

2-1-4 Remarques supplémentaires sur les résultats des analyses hiérarchiques---173

2-2 Analyse hiérarchique implicative entre variables----------174

2-2-1 Classe de C.M.1----------174

2-2-2 Classes de C.M.2, sixième, cinquième prises ensemble----------176

2-2-3 Etude comparative des trois niveaux C.M.2, sixième, cinquième----------179

2-2-4 Conclusion----------182

2-3 Analyse hiérarchique implicative entre classes de variables----------184

2-3-1 Classe de C.M.1----------184

2-3-2 Classes de C.M.2, sixième, cinquième----------185

2-3-3 Comparaison des trois niveaux: C.M.2, sixième et cinquième----------187

2-3-4 Conclusion----------187

3- ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES----------189

3-1 Introduction----------189

3-2 Première analyse: caractéristiques des divisions pour les classes de C.M.2, sixième, cinquième----------189

3-2-1 Analyse du premier axe----------189

3-2-2 Analyse du deuxième axe----------189

3-2-3 Réussites et échecs aux divisions et variables supplémentaires----------190

3-3 Deuxième analyse : caractéristiques des divisions pour la classe de C.M.1----------190

3-4 Troisième analyse : réussites ou échecs aux divisions et soustractions----------192

3-5 Conclusion----------192

4- CONCLUSION GENERALE DE LA PARTIE EMPIRIQUE----------192

CONCLUSION GENERALE----------194

BIBLIOGRAPHIE----------195

ANNEXES- : Non publiées sur HAL

INTRODUCTION GENERALE

L'objet de la présente étude concerne la technique opératoire de la division. Elle vise à analyser les relations entre les procédures et sous-procédures, les erreurs et les conceptualisations sous-jacentes. Les concepts mathématiques sont envisagés selon le sens que les enfants donnent à l'algorithme, à diverses phases de la gestion de cet algorithme.

Les difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves sont largement spécifiques du contenu des connaissances. La didactique des mathématiques s'intéresse à la formation de compétences opératoires et au développement de la pensée rationnelle dans ce qu'elles ont de spécifique du contenu. La présente thèse relève à la fois de la didactique et de la psychologie cognitive développementale. En effet, dans l'élaboration de leurs savoir-faire et de leurs savoirs mathématiques, les enfants saisissent d'abord certaines situations et relations simples qui jouent le rôle de modèles primitifs. A partir de ces premières conceptualisations, ils abordent des situations plus complexes, qui leur permettent d'enrichir le sens de leurs connaissances.

Le sens de la division peut être construit à partir d'une opération concrète, comme le partage d'un gâteau ou d'un paquet de bonbons. Mais la division peut correspondre à divers concepts : soit à la division d'une mesure par un scalaire, soit au concept de rapport "scalaire" entre mesures de même nature, soit au concept de coefficient de proportionnalité entre mesures de nature différente. Elle peut mettre en jeu différents types de nombres (naturels, rationnels, décimaux). Ces variations sont l'occasion de difficultés spécifiques au cours de l'apprentissage. C'est ainsi que les divisions concernant les décimaux sont particulièrement intéressantes à étudier. Il est connu notamment que la partie décimale est souvent assimilée à un nombre entier, notamment lorsque les élèves doivent ordonner des décimaux. Ce problème n'est pas réglé à la fin de l'école élémentaire et, comme le dit Brousseau (1987), "au moment où pourraient se faire les reprises et les accommodations nécessaires, dans l'enseignement secondaire, on n'a plus de temps à consacrer à cette question subalterne."

L'objet de notre étude, est de mieux comprendre les principales ruptures cognitives susceptibles d'intervenir au cours de l'apprentissage de la division : par exemple les élèves peuvent avoir beaucoup de mal à rejeter une conception fausse. Nous envisageons les erreurs comme le résultat non seulement de techniques défaillantes, mais aussi de conceptions fausses. Nous avons également recherché dans l'histoire des mathématiques, la trace des difficultés qui pouvaient s'apparenter aux obstacles rencontrés aujourd'hui dans l'apprentissage. Notre étude sur la division se borne à l'algorithme lui-même, ce qui n'exclut pas l'intérêt d'une autre recherche sur le sens de

la division.

Notre but est d'analyser les procédures effectivement utilisées par les élèves, qui sont à la source de leurs erreurs : la description de ces erreurs ne suffit pas. La raison de ces erreurs doit être recherchée non seulement dans les violations de la syntaxe de l'algorithme, mais aussi dans le lien de ces erreurs avec les aspects conceptuels en jeu dans la procédure algorithmique. Les erreurs doivent être rapportées aux diverses configurations des relations entre le dividende, le diviseur, le quotient et le reste. On constate bien entendu des erreurs qui sont imputables à une mauvaise exécution, mais d'autres erreurs diffèrent d'un individu à un autre, d'une classe à une autre, d'une manière intelligible. Ce sont celles-là qui nous intéressent le plus pour la détection des conceptions des élèves. Nous expliquerons plus loin comment des méthodes statistiques comme celles de Lerman et de Gras, peu utilisées en Sciences Humaines, nous permettent de cerner ces conceptions.

Le travail empirique de cette thèse consiste principalement en une expérimentation effectuée auprès d'élèves de la fin de l'école élémentaire et du début du collège : du cours moyen première année à la classe de cinquième. Nous avons utilisé 28 divisions dont la difficulté est en général croissante au cours de la passation.

Nous avons trouvé intéressant de réunir des informations sur l'histoire des procédures de division, afin de montrer le caractère laborieux de l'évolution de cet algorithme. Les formes diverses prises par la division au cours de l'histoire reflètent non seulement des pratiques sociales spécifiques, mais aussi des difficultés inégalement surmontées. Dans les siècles passés, les individus capables d'effectuer une longue division formaient une très petite minorité. L'apparition des machines à calculer a totalement modifié la situation. Néanmoins, on se trouve aujourd'hui dans une situation complexe, parce que les problèmes qui ont motivé l'introduction de l'algorithme de la division, de même que les concepts qui ont gouverné son évolution, sont constitutifs de la signification de la division. C'est un point d'ancrage pour l'analyse des processus d'enseignement et d'apprentissage, comme pour l'analyse historique.

Un algorithme nouveau, comme d'ailleurs un concept nouveau, prend sa signification dans un petit nombre de situations, son extension à d'autres situations pose des problèmes, parce que l'assimilation de ces situations demande éventuellement l'abandon des conceptions initialement formées. Par exemple, la multiplication et la division des nombres entiers véhiculent des conceptions qui font obstacle à la conception de la multiplication et de la division des rationnels et des décimaux : ce que l'élève pensait "comprendre" doit être modifié. L'existence de cet obstacle a des conséquences didactiques :

-Peut-on éviter ces obstacles ?

-Doit-on le faire ?

-Comment franchir ceux qui ne peuvent pas être évités ?

La division est un algorithme intéressant parmi les calculs en colonne, car elle requiert une part de calcul évaluatif, et le simple recours aux tables est insuffisant. On procède à la fois de gauche à droite, et de droite à gauche, selon la phase dans laquelle on se trouve. Ce n'est pas le cas pour l'addition, la soustraction et la multiplication, qui ne fonctionnent que de droite à gauche. La division est le plus complexe des algorithmes en colonne, et peut être considérée comme le second grand saut mathématique pour les élèves, après celui de la numération écrite. Deux compétences principales conditionnent totalement l'algorithme de la division : la multiplication du diviseur par un nombre à un chiffre, et la soustraction entre le dividende d'étape et ce produit partiel. L'évaluation de l'ordre de grandeur du chiffre du quotient est aussi une compétence importante ; elle repose sur l'évaluation de l'ordre de grandeur des produits partiels envisagés. Ainsi, l'algorithme de la division opère une relation entre deux pans du domaine numérique : l'estimation et les algorithmes déjà connus. Ces deux sous-procédures sont reprises de manière récurrente à chaque cycle :

-l'estimation du chiffre du quotient,

-la multiplication du diviseur par un nombre à un chiffre,

-l'identification non ambiguë du dividende d'étape,

-la soustraction du produit partiel ainsi obtenu.

La division engendre des risques de confusion d'autant plus grands qu'on fait alterner plusieurs types de traitement. Les représentations des élèves, qu'elles soient spontanées ou qu'elles résultent de l'apprentissage, dépendent des techniques de calcul dont ils disposent et des conceptions qu'elles véhiculent.

C'est traditionnellement à partir de situations de partage, que l'on introduit la division dans les classes élémentaires : la liaison entre division et partage est si étroite, qu'on en vient souvent à lire des phrases comme :

-"Diviser c'est partager",

-"Diviser 258 par 14, c'est rechercher combien de fois 14 est contenu dans 258."

Visiblement, de telles locutions cherchent à faire image. Elles évoquent une manipulation qui permet de concrétiser le calcul que l'on se propose de faire. En contrepartie, elles sont l'occasion d'ambiguïtés, qui risquent d'introduire des malentendus.

En ce qui concerne l'expression "diviser, c'est partager", de deux choses l'une :

- ou bien les deux verbes ont leur sens courant, et la phrase ne fait que signaler leur synonymie, ce qui est incorrect ;

- ou bien cette expression cherche à donner au verbe diviser un sens particulier, ce qui soulève la question de savoir pourquoi on ne retient que la notion du partage.

La deuxième phrase présente un caractère un peu plus mathématique ; néanmoins elle contient des termes vagues. Que signifient par exemple, les expressions "combien de fois" et "contenu dans" pour un élève ? Dans son sens arithmétique, diviser s'emploie dans des phrases telles que, "diviser le nombre 258 par le nombre 14", tandis que partager, est un mot qui s'utiliserait plutôt dans le sens "partager 258 objets en 14 parts". De même, l'ensemble des parts n'étant pas de même nature que l'ensemble des objets, et donc pas un sous-ensemble, l'expression "contenu dans" est inappropriée si l'on entend 14 comme 14 parts. Si 14 est l'effectif d'une part, alors l'expression "contenu dans" est acceptable.

La connaissance est une adaptation, la conceptualisation est un processus cognitif qui répond à des questions que se pose l'enfant lorsqu'il est confronté à certaines situations. Quelles relations établir entre situations et concepts ? Le concept indispensable pour comprendre cette relation est celui de schème (Vergnaud, 1983). Il désigne l'organisation de l'action du sujet en situation. C'est une notion de schème empruntée par Piaget à Kant, et considérablement développée par lui, comme instrument principal de sa théorie.

C'est cette problématique générale que nous voulons appliquer aux différents sens de la division. Nous nous intéressons ainsi à la signification donnée à l'algorithme par les élèves, sens qui est lié à celui de la numération de position, puisque les règles de cette opération sont étroitement liées aux principes de celle-ci.

Ce qui nous intéresse plus particulièrement c'est de comprendre comment l'algorithme peut s'appauvrir, voire dégénérer, au cours de l'apprentissage. Les opérations sur le signifiant sont essentielles : sans les traces écrites, on ne peut effectuer une division jusqu'au bout : l'algorithme ne fonctionne pas. La division est un script-algorithme, dans la mesure où le schème porte à la fois sur des signifiants et des objets de pensée. En effet, une représentation symbolique comme celle de la division en colonnes, est essentielle à l'algorithme et aux objets sur lesquels il porte, à chaque étape. Réciproquement, la manipulation des signifiants fait nécessairement appel aux concepts. Ce sont les invariants opératoires, reconnus et utilisés par les sujets qui, selon Vergnaud, constituent la base conceptuelle des schèmes. Ils sont souvent implicites : tel est le cas des concepts de produit partiel et de dividende d'étape par exemple.

Un schème reste largement implicite, même lorsqu'il s'appuie sur la manipulation de signifiants. L'explicitation dans le langage ou dans un symbolisme mathématique a une fonction différente selon les cas. La catégorie de dividende partiel pose d'autres problèmes conceptuels que

celles de dividende, de diviseur, de quotient, et de reste. Une théorie de la conceptualisation mathématique fait nécessairement une part à l'épistémologie. Les enfants développent des interprétations en fonction des situations qu'ils ont rencontrées et cru comprendre. Notre étude veut rendre compte des "raccourcis", voire des improvisations que le sujet effectue : "*L'essentiel pour une représentation est de permettre au sujet une lecture des situations, une anticipation de leur évolution et une analyse de leurs propriétés*" (Brousseau, 1990).

La notion de champ conceptuel de Vergnaud permet de rendre compte à la fois des situations, des schèmes et des concepts. Sans invariants opératoires, par exemple, la représentation implicite du réel n'est pas possible, car ce sont les objets, leurs relations, et leurs propriétés qui sont combinables et re-combinables. La construction de l'algorithme de la division est un exemple d'analyse en termes de schème et de concept.

L'étude de la division à l'école élémentaire se réduit trop souvent à la mise en place d'une technique opératoire, et les situations concrètes utilisées servent tant bien que mal et uniquement à justifier les différentes étapes du calcul. Le rôle d'une analyse psychologique est de dégager l'organisation invariante des conduites pour une classe de situations données. Selon Vergnaud, les schèmes sont des algorithmes, mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes, même dans l'exécution d'une division. Ils n'ont pas en général les propriétés d'effectivité et de nécessité des algorithmes. L'étude des erreurs et des schèmes erronés, nous informe sur les conceptions des élèves.

Rappelons que, selon Vergnaud, un schème est composé de quatre sortes d'éléments :

-le but à atteindre : pour la division, trouver le quotient et le reste à une approximation fixée. Ce but permet d'engendrer des sous-buts et des anticipations.

-des règles d'action : pour la division, les règles de l'algorithme s'il est correctement appliqué, sinon les règles qui engendrent l'action du sujet.

-des invariants opératoires qui constituent la conceptualisation nécessaire à ces règles : ici la conceptualisation polynomiale du dividende, du diviseur, du quotient, et du reste.

-des possibilités d'inférence qui permettent de calculer règles et anticipations en fonction de l'information prélevée dans la situation et des invariants opératoires pertinents. Il est clair que le sujet invente lorsqu'il est confronté à une situation nouvelle pour lui !

La connaissance d'un sujet individuel est fondamentalement un répertoire de schèmes. Celui-ci est en général très grand et beaucoup de schèmes ont un domaine d'application restreint. Ils se développent et se transforment au cours de l'expérience et de la maturation, à cause de la résistance qu'opposent les situations nouvelles à leur traitement par les schèmes existants.

Une bonne référence théorique est la "*repair theory*" de Van Lehn (1990). Ses recherches portent sur les procédés mis en oeuvre par les enfants lorsqu'ils sont mis en situation d'effectuer des soustractions. Le caractère organisé des erreurs des élèves est détecté grâce aux régularités observées à différents moments, entre différents individus ou chez un seul individu. Ces erreurs s'organisent en système et se caractérisent par une logique interne. L'interprétation de ces règles et des processus mis en jeu peut alors être amorcée. Le classement que Van Lehn effectue des stratégies de "réparation" des élèves, permet, entre autres, de repérer les obstacles liés à la conception du zéro, et ceux liés à l'incapacité de concevoir une opération comme : 5 - 7. Van Lehn caractérise ce qu'il appelle des "impasses" de la façon suivante :

-des impasses dites de "décision", quand l'enfant suspend l'exécution d'une procédure, dès lors qu'il ne peut pas prendre de décision.

-des impasses dites "de référence", lorsque l'enfant ne peut pas identifier l'objet à traiter, faute d'identifier le contexte du problème.

-des impasses dites "primitives", lorsque les procédures nouvelles font appel aux seules conceptions que le sujet s'est appropriées : par exemple, il utilise la décomposition additive pour résoudre une division.

-des impasses" critiques", terme qui représente les blocages du sujet face à des situations qui ne lui semblent pas basées sur le sens commun.

Mais, comme le remarque par exemple Resnick (1982), l'analyse s'appuie uniquement sur les aspects syntaxiques des règles algorithmiques. Si l'on veut analyser les concepts en acte mis en oeuvre dans ces calculs, la notion de schème est nécessaire.

Le développement cognitif s'analyse en dernier ressort comme un enrichissement adaptatif par filiations et ruptures des invariants opératoires, des règles d'action, et des systèmes de contrôle des productions du sujet. Ce processus d'adaptation des schèmes consiste principalement en découvertes, combinaisons, décombinaisons et recombinaisons.

Chaque pas de l'algorithme représente une nouvelle situation de calcul, et c'est la mise en relation des différentes situations qui permet le contrôle. Par exemple, "*le schème partager/distribuer, fonctionne pour l'élève à condition que le dividende contienne le diviseur*" ; (Brun, Conne, 1991).

Ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget, c'est que le concept d'obstacle véhicule l'idée supplémentaire que la connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée, et à l'établissement d'une connaissance meilleure (Bachelard, 1938). Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse. Son

rejet doit être incorporé dans le nouveau savoir. L'obstacle est une connaissance, une conception, et non pas une simple difficulté ou un simple manque de connaissance. Celle-ci continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre, même après la prise de conscience de son inexactitude.

"Fondamentalement cognitifs, les obstacles semblent pouvoir être ontogénétiques, épistémologiques, didactiques et même culturels selon leur origine et la façon dont ils évoluent", (Brousseau, 1989).

L'erreur tient une place importante dans l'apprentissage ; elle est malheureusement stigmatisée par la sanction de la note ou de la réprimande. L'interprétation des erreurs ne relève pas toujours des processus d'apprentissage. Certains travaux montrent qu'elles peuvent provenir du processus d'enseignement lui-même. L'idéal pour un enseignant, étant l'absence d'erreurs, celui-ci peut alors être conduit à ne jamais attirer l'attention des élèves sur les erreurs qu'ils font presque inévitablement.

Dans une perspective didactique, se pose alors à l'enseignant un double problème :

-Comment interpréter les erreurs des élèves ? Sur quoi le renseignent-elles : sur le travail de l'élève, sur ses conceptions par rapport à la connaissance visée, sur la perception qu'il a des attentes du maître ?

-Quel comportement doit-il adopter face à ces erreurs ?

Les maîtres et les manuels opèrent beaucoup de réductions et de simplifications dans l'enseignement de la division. Par exemple, associer les décimaux à des mesures conduit à considérer les décimaux comme des changements d'unité. Les décimaux sont souvent limités au deuxième chiffre après la virgule, ce qui renforce encore leur interprétation comme des nombres entiers.

Comme le dit Brousseau (1983) : "*Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les manuels, avec seulement un petit complément pour la virgule*". Cette assimilation aux naturels pose évidemment question dans le cas des divisions, qui "ne tombent pas juste", indice certain pour l'élève que l'on a dû se tromper quelque part.

Par ailleurs, la suppression dès le début de l'apprentissage, de certains calculs intermédiaires, comme les soustractions partielles, ne peut que troubler les élèves. Songeons ainsi à l'habileté opératoire numérique requise de la part d'un enfant de neuf ans. Il faut en effet effectuer mentalement une multiplication, suivie d'une soustraction, pouvant en outre comporter l'addition des retenues. Sur ce point d'ailleurs, l'usage diffère d'un pays à un autre.

Les évolutions actuelles, et ceci principalement dans notre population, dès la classe de sixième, favorisent l'utilisation d'une calculette pour effectuer les opérations arithmétiques. Il serait utile d'en tirer les conséquences didactiques pour l'apprentissage de la division, afin de mettre en cohérence les objectifs terminaux des acquisitions, et les objectifs d'étape.

L'enseignement de la division pose en effet un problème didactique difficile et primordial. Son usage est si répandu et banalisé, que les enfants le rencontrent assez tôt, dans la scolarité, sous sa forme actuelle. La conception la plus courante est celle d'une exécution automatique de l'opération, et d'un contrôle partiel de sa signification. Il ne paraît guère possible de proposer une opération aussi complexe, de façon trop précoce. Puis, très vite, l'usage de la calculette risque d'envoyer aux oubliettes l'apprentissage de l'algorithme. Alors que faire ?

Nous allons présenter en premier lieu un aperçu de l'histoire de la division, puis une étude de quelques cahiers d'élèves et manuels à usage d'enseignement, pendant la période de la Convention. Ensuite des développements plus profonds sont effectués, qui font suite à notre introduction. Parmi toutes les références que nous venons d'évoquer, nous choisissons d'approfondir principalement les théories de Bachelard, Brousseau, Van Lehn, Vergnaud, et Gras sur le plan méthodologique.

PARTIE HISTORIQUE

Trouver combien un nombre peut être contenu de fois dans un autre, s'appèle diviser le second par le premier, parce que c'est diviser le second en autant de parties, qu'il y a d'unités dans le second.

Trouver combien de fois 6 est contenu dans 2,124, c'est diviser 2,124 par 6, c'est diviser 2,124 en six parties égales, puisque le nombre répété six fois fera 2,124. Le nombre que l'on divise, s'appèle *dividende ;* celui par lequel on le divise, s'appèle *diviseur ;* le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende, s'appèle *quotient.* Ainsi, dans cet exemple, 2,124 est le *dividende ;* 6, le *diviseur ;* 354, le *quotient.*

Comme les retranchemens successifs, nécessaires pour savoir combien de fois un nombre est contenu dans un autre, entraîneroient encore des longueurs, il est bon de chercher un moyen plus simple de trouver combien de fois un nombre est contenu dans un autre ; vous observerez donc d'abord, qu'il y est contenu au moins une fois, puisque le second nombre est nécessairement plus grand que le premier, et qu'il y est contenu neuf fois tout au plus, puisque s'il y étoit contenu dix fois, ou plus de dix fois, vous auriez pu retrancher, au moins une fois de plus, ce même nombre supposé dix fois plus grand : or, en suivant la marche de l'opération précédente, vous avez déja épuisé cette soustraction.

Vous direz donc : en 21, combien de fois 6 ; je suppose qu'il y est quatre fois ; quatre fois 6 sont 24 ; or 24 est plus grand que 21, $24>21$, il y est donc contenu moins de quatre fois ; je suppose donc qu'il y est trois fois ; trois fois 6 sont 18, 18 est plus petit que 21, $18<21$; il y est donc contenu moins de quatre fois et plus de trois ; il y est donc contenu *trois fois* avec un reste.

Extrait d'un texte de Condorcet (1794)

« Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité, Neuvième leçon », p. 5

PLAN : PARTIE HISTORIQUE SUR L'ALGORITHME

CHAPITRE I : HISTORIQUE DE L'ALGORITHME

INTRODUCTION

1- LA DIVISION AVANT LES ANNEES 1000

1-1 - Les processus de duplication et de médiation : les Egyptiens.

1-2 - Le produit de 1/a par b : les civilisations babyloniennes et sumériennes.

1-3 - Quelques tentatives contre le monopole des fractions sexagésimales : Diophante (Grèce).

1-4 - Exemple d'une méthode de calcul chinoise.

1-5 - Les intermédiaires entre l'Inde et l'Occident : le renouveau apporté par les Arabes.

2 - LA DIVISION APRES LES ANNEES 1000

2-1 - La première introduction des chiffres arabes en Europe

2-2 - Le Haut Moyen Age Chrétien

2-3 - La division courte

2-4 - La méthode de Gerbert

2-5 - La division par facteurs

2-6 - La méthode Galley

2-7 - Les principes de quelques divisions en usage en 1711

3 - PRINCIPES ET DESCRIPTIONS DE LA DIVISION

3-1 - Définition de la division

3-2 - Terminologie

3-3 - Le processus de division

4 - PRINCIPE DES PRESENTATIONS ACTUELLES

4-1 - La construction progressive de notre "longue" division

4-2 - De l'origine du système sexagésimal à celui des décimaux

4-3 - Abacistes contre algoristes: le calcul et ses variations

4-4 - Les premières machines à calculer

4-5 - Origine et évolution du zéro

4-6 - Adoption de la division actuelle sous la Convention

CONCLUSION

CHAPITRE II : ETUDE D'ARCHIVES : CAHIERS D'ELEVES ET DE MANUELS : ou comment s'est effectué le passage de la méthode GALLEY à la méthode actuelle

INTRODUCTION

1 - ANALYSE DE MANUELS

1-1 - Analyse de manuels avant la Convention

1-1-1 Livre d'arithmétique (auteur inconnu, 1700 environ)

1-1-2 Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736)

1-1-3 Livre d'arithmétique de Barreme (1788)

1-2 - Analyse de manuels après la Convention

1-2-1 Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine de Bezout (1798)

1-2-2 Extraits de cours d'instituteurs (1843)

2 - ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES OU D'ELEVES-PROFESSEURS

2-1 - Analyse de cahiers d'élèves avant la Convention

2-1-1 - Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas (1761).

2-1-2 - Cahier d'arithmétique (auteur inconnu, 1763)

2-2 - Analyse de cahiers d'élèves après la Convention

2-2-1 Cahier d'arithmétique de B. Bayle de Jaire (1815)

2-2-2 Cahier d'arithmétique de G. Bonhoure (1820)

2-2-3 Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud (1828)

2-2-4 Cahier d'arithmétique de Jean Labarthe (1855)

CONCLUSION

CHAPITRE I : HISTORIQUE DE L'ALGORITHME

INTRODUCTION

L'évolution de la pédagogie et de l'idéologie sous-jacente (la première imposée et (ou) acceptée, la seconde peu mise en lumière) exige de l'enseignant (celui qui transmet le savoir) des révisions parfois déchirantes. Entre autres, s'il lui appartient toujours de faire acquérir des connaissances, il n'a plus uniquement à transmettre un savoir venu d'ailleurs, mais à accompagner le jeune dans la construction de son savoir. Rien n'est simple, cependant, car la cohérence interne de ce savoir construit doit s'inscrire dans celle du savoir scientifique socialisé. L'histoire des sciences et des techniques illustre bien cette idée, essentielle pour la didactique, que les concepts ont une histoire. Ils apparaissent dans un certain état de la problématique des savants, et se développent ultérieurement pour faire face à de nouveaux problèmes. Ce n'est qu'après une longue période historique, le plus souvent, qu'ils atteignent un état relativement stable et peuvent faire l'objet de définitions complètes et claires.

L'introduction de différentes présentations écrites de l'algorithme de la division, au cours du temps, construit une progression des objets de savoir et d'enseignement. Afin de clarifier les étapes du sens mathématique que l'on peut discerner dans les diverses présentations données à cette opération arithmétique, nous rassemblons un ensemble d'analyses et de notations concernant les origines de l'opération mathématique d'une part, et l'analyse de quelques présentations recueillies dans des archives ou de vieux manuels d'autre part. Notre interrogation porte sur l'origine et la signification de l'évolution de ce concept. Cet examen met en relief un certain fonctionnement des implications épistémologiques, propres à la période à laquelle elles apparaissent. Cette temporalité donne sens aux différents algorithmes qui constituent leur origine, leur valeur et leur portée. Il convient de noter ici l'importance des refontes et des reprises par lesquelles le processus de construction de la division réordonne ses perspectives, réélabore les sens des savoirs antérieurs en vue de leur avancée même. Par exemple, il paraît logique de considérer ce qui a été dit au XVIIe siècle, comme un des éléments constitutifs du sens présentement accordé à la division.

Un algorithme est un ensemble fini de règles d'action, qui permet de générer une suite d'opérations permettant de traiter une situation d'une classe donnée à l'avance. L'usage du symbole mathématique traduit un certain éloignement par rapport à la réalité perçue : une figure représentant une division est un instrument. Mais le passage à des symboles marque aussi un progrès, dans la mesure où il ouvre la voie à l'enrichissement d'un certain type d'abstraction, éventuellement une régression par rapport à la connaissance directe: la division mathématique renvoie souvent aux situations quotidiennes, dont elle fournit des interprétations cohérentes, mais le moment peut venir

assez vite, où les divisions, issues du monde empirique, butent sur des difficultés: partager 0,8 litre de jus de pomme entre deux enfants par exemple. Ce n'est pas d'ailleurs uniquement chez les enfants que la division soulève des difficultés. L'introduction des nouveaux programmes de mathématiques a créé un engrenage qui n'a pas laissé sans dommages certaines conceptions antérieures de l'enseignement des mathématiques.

1 - LA DIVISION AVANT LES ANNEES 1000

1-1 - Les processus de duplication et de médiation : les Egyptiens

Probablement la préhistoire de la division écrite, ou sa plus vieille forme, est celle utilisée par les Egyptiens. Celle-ci était basée sur le processus de duplication et médiation. Ainsi, pour diviser 19 par 8, on peut envisager le travail suivant :

On commence par écrire les multiplications suivantes par 8, qui est le diviseur :)

$$2 \times 8 = 16$$
$$\frac{1}{2} \times 8 = 4$$
$$\frac{1}{4} \times 8 = 2$$
$$\frac{1}{8} \times 8 = 1$$

Puis,sachant que 19 =16 +2 +1, on sélectionne les nombres composant cette somme.

$$\text{Le quotient est par conséquent : } 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$\text{Ce qui nous donne : } 19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

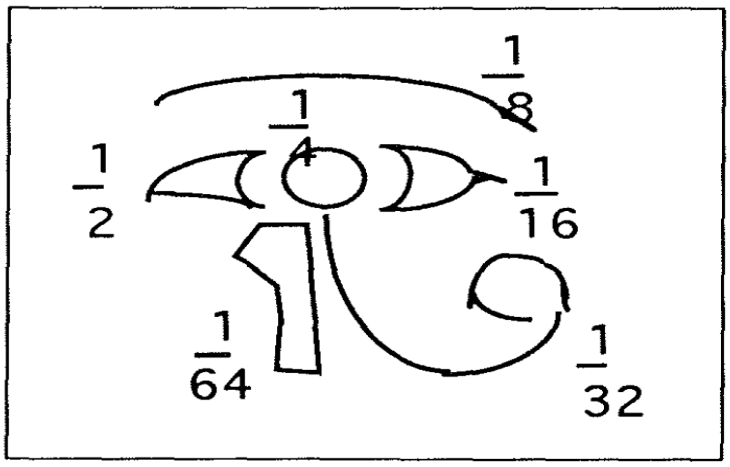
Signalons que la numération hiéroglyphique est à base dix, non positionnelle : on dispose de symboles différents pour désigner 1, 10, 100 etc. On répète un symbole autant de fois qu'il le faut et, pour lire un nombre, on additionne la valeur de l'ensemble des symboles intervenant dans son écriture ; l'ordre de ceux-ci n'importe donc pas, la représentation pouvant être aussi bien horizontale que verticale. La numération hiératique est aussi décimale, mais des signes spéciaux supplémentaires évitent la répétition des symboles du système hiéroglyphique.

En dehors des entiers, les Egyptiens ne conçoivent que les fractions unitaires. Dans les deux numérations, ils les écrivent en faisant surmonter le symbole représentant le dénominateur d'un signe particulier. Cependant, la fraction 2/3 semble jouir d'un statut privilégié et un symbole spécial lui est associé (celui-ci ressemble à un 7 en écriture hiératique).

Les Egyptiens utilisaient donc des quantièmes telles que : un demi, un quart, etc. souvent

appelées "unités rationnelles". Ces unités sont obtenues par fractionnement. On divise l'unité originelle en deux, puis la nouvelle unité encore en deux, et ainsi de suite. Ces unités à base deux sont parmi les plus anciennes que l'humanité ait utilisées : une fois nommées, plutôt que de parler des 3/4 de quelque chose, il suffisait de demander une moitié, plus une moitié de moitié. A notre époque, la fraction 1/2 reste privilégiée. La division par deux est la forme la plus élémentaire du partage.

Une illustration des fractions chez les Egyptiens est connue sous la forme d'un mythe, celui de l'oeil d'Horus. En simplifiant l'histoire de ce mythe, car il existe plusieurs versions de celle-ci, on peut retenir ceci : Thot, protecteur de la lune et créateur du calendrier, communément appelé le "dieu qui sait compter" a régné sur l'arithmétique. Il a inventé l'écriture et joué un rôle déterminant dans le calcul des années du règne des rois, ce qui fondait la chronologie. Thot compte le temps de l'année en 12 mois lunaires de 30 jours (soit 360 jours). La légende dit que pour rétablir l'année dans sa durée réelle, il faut justifier les cinq jours supplémentaires, en les offrant à Nout, déesse du ciel. Nout ayant eu un commerce secret avec Geb, dieu de la terre, Râ, le soleil, qui s'en aperçoit, prononce contre elle un charme qui la rend stérile durant l'année ; elle peut enfanter un dieu chacun de ces cinq jours qui sont considérés comme volés à la Lune. Elle en obtient donc cinq qui sont : Osiris, Haroeris (ou Horus l'ancien), Seth, Isis, Nephtys. Par la suite, Osiris épouse Isis, ce qui occasionne la jalousie de Seth, qui tue alors Osiris. Isis élève son fils Horus dans un esprit de vengeance, ce qui engendre un combat entre Seth et Horus. A l'issue de celui-ci, Seth arrache l'oeil d'Horus et le brise en six morceaux. Thot réunit alors les différentes parties de l'oeil, dont la configuration est à la fois celle d'un oeil humain et celle d'un faucon. Chaque partie de l'oeil reçoit une valeur numérique, correspondant aux moitiés successives d'unités : la partie droite de la cornée est, 1/2 , l'iris, 1/4 , le sourcil, 1/8, la partie gauche de la cornée, 1/16 , la marque colorée oblique, 1/32 , la marque colorée verticale, 1/64 : soit 1/4 + 1/4+ 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 63/54 (voir schéma ci-dessous) :



L'œil d'Horus

L'addition de ces fractions ne correspond cependant pas tout à fait à l'unité : c'est une suite qui, si elle était prolongée, convergerait vers l'unité.

A part 2/3 (pour lequel les Egyptiens disposent d'un graphisme spécial), on peut dire qu'il s'agit de divisions "à base deux". Les parties de l'oeil d'Horus sont réservées aux mesures de capacité uniquement pour les céréales et le minerai. "Certains érudits ont l'air de penser que les Egyptiens confondaient avec l'unité l'expression numérique obtenue en additionnant les six premières puissances négatives de 2. Nul doute qu'ils étaient assez bons mathématiciens pour savoir qu'il y avait une différence et quelle était l'expression mathématique de celle-ci. Si l'on découpe dans un segment de droite sa moitié, à laquelle on ajoute la moitié du reste et ainsi de suite, la différence avec le segment initial est toujours égale au dernier segment ajouté ; c'est une propriété simple qui caractérise le système dyadique. Or la multiplication et la division des nombres entiers exigeaient justement en Egypte l'intervention de ce type de système, il est donc naturel que la somme des termes d'une progression géométrique limitée de premier terme 1/2 et de raison ½ ait attiré leur attention. On peut même se demander si ces considérations simples ne les ont pas incités à rechercher la décomposition d'une fraction quelconque en la somme de fractions toujours de numérateur 1" (Guitel, G., 1975).

Ainsi, l'arithmétique égyptienne s'organise-t-elle autour de quelques règles :

-la possibilité de multiplier et de diviser par deux un nombre entier, ce qui permet ensuite d'effectuer par addition n'importe quelle multiplication ;

-la capacité de trouver les 2/3 de n'importe quelle fraction unitaire suivant la règle :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

Enfin, se refusant à admettre des fractions autres qu'unitaires, ils sont conduits à décomposer des fractions de la forme 2/n, en sommes de fractions unitaires ; comme par exemple :

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

.

Ce calcul étant compliqué, ils se réfèrent à une table établie une fois pour toutes. Ainsi, le papyrus de Rhind (daté vers 1650 avant Jésus Christ) débute par une liste de décompositions de 2/n de n = 5 à n = 101. Le papyrus de Rhind acheté à Louqsor, au cours du XIXe siècle par un

Anglais nommé A.H. Rhind a été légué au British Museum. Il s'agit d'une conception des fractions qui n'a été inventée qu'une fois dans l'histoire de l'humanité, et qui a essaimé durant toute l'Antiquité et jusqu'au Moyen-Age.

Dans ce fameux papyrus, le scribe Ahmnès donne une table de conversion des fractions de la forme 2/n en sommes de quantièmes jusqu'à n = 101. Par exemple :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{13} = \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8} \ \cdots$$

Dans ce papyrus de Rhind, on trouve la résolution de problèmes théoriques relatifs à l'art difficile de calculer les fractions. Notons que le symbolisme actuel, s'il nous aide à comprendre le processus, n'est sans doute pas la marche opératoire réelle de l'Egyptien. Le système de calcul nous paraît bien lent et primitif, mais il ne nécessite aucun effort de mémoire, le maniement des fractions unitaires, pourtant complexe, est effectué avec habileté par les scribes. Ce développement est sans doute lié au fait que le système social pharaonique impliquait une énorme comptabilité matérielle dans le contrôle et la répartition des ressources, des denrées alimentaires et des objets, tâche qui incombait aux scribes.

D'après Guitel G. (1975), la division était considérée par les Egyptiens comme une sorte de multiplication : on s'efforçait de reconstituer le dividende en multipliant le diviseur par le nombre convenable, ce qui supposait, au moins à l'origine, que l'opération donnerait un nombre entier. Citons encore quelques exemples issus de son ouvrage (p.91, 1975) :

Papyrus de Rhind n° 69 : division de 1 120 par 80, ce que le scribe énoncera : "additionne en commençant par 80 jusqu'à ce que tu trouves 1120".

1	80
/ 10	800
2	160
/ 4	320

Somme : 1120 (Les nombres retenus sont munis d'une barre oblique)

soit 1120 ÷ 80 = 10 + 4

Notons que nous présentons ici ces calculs suivant la numération décimale, que les Egyptiens n'utilisaient pas à cette époque.

Le quotient est 14, obtenu en tenant compte des traits obliques, qui retiennent les éléments du résultat que l'on veut obtenir, mais pour l'Egyptien, qui accompagne tout résultat d'un graphisme représentant un rouleau scellé, le quotient est curieusement placé à côté du dividende (ici 1120). Le processus est ici lié à une décomposition additive, d'où l'importance de la somme.

1	8
/ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
/ $\frac{1}{4}$	2
/ $\frac{1}{8}$	1

soit $19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Papyrus de Rhind n° 24 : diviser 19 par 8

1	8
/ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
/ $\frac{1}{4}$	2
/ $\frac{1}{8}$	1

soit $19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

)

Une duplication permet de trouver la partie entière du quotient, une série de médiations permet ensuite de trouver la partie fractionnaire de ce même quotient.

Papyrus de Rhind n° 25 : diviser 16 par 3

/ 1	3
2	6
/ 4	12
$\frac{2}{3}$	2
/ $\frac{1}{3}$	1

soit $16 \div 3 = 4 + 1 + \frac{1}{3}$

Il est singulier de constater que le calcul débute à la quatrième ligne, par une multiplication par 2/3 Il eût été plus simple de multiplier 3 par 1/3, puisqu'on voulait justement ajouter l'unité à 15, mais cette procédure montre l'importance que les mathématiciens égyptiens attribuaient à 2/3, quitte à lui substituer ensuite 1/3 (d'après Guitel, p. 93, 1975).

Papyrus de Rhind n°21 : diviser 4 par 15

1	15
$\frac{1}{10}$	$1 + \frac{1}{2}$
$/\frac{1}{5}$	3
$/\frac{1}{15}$	1

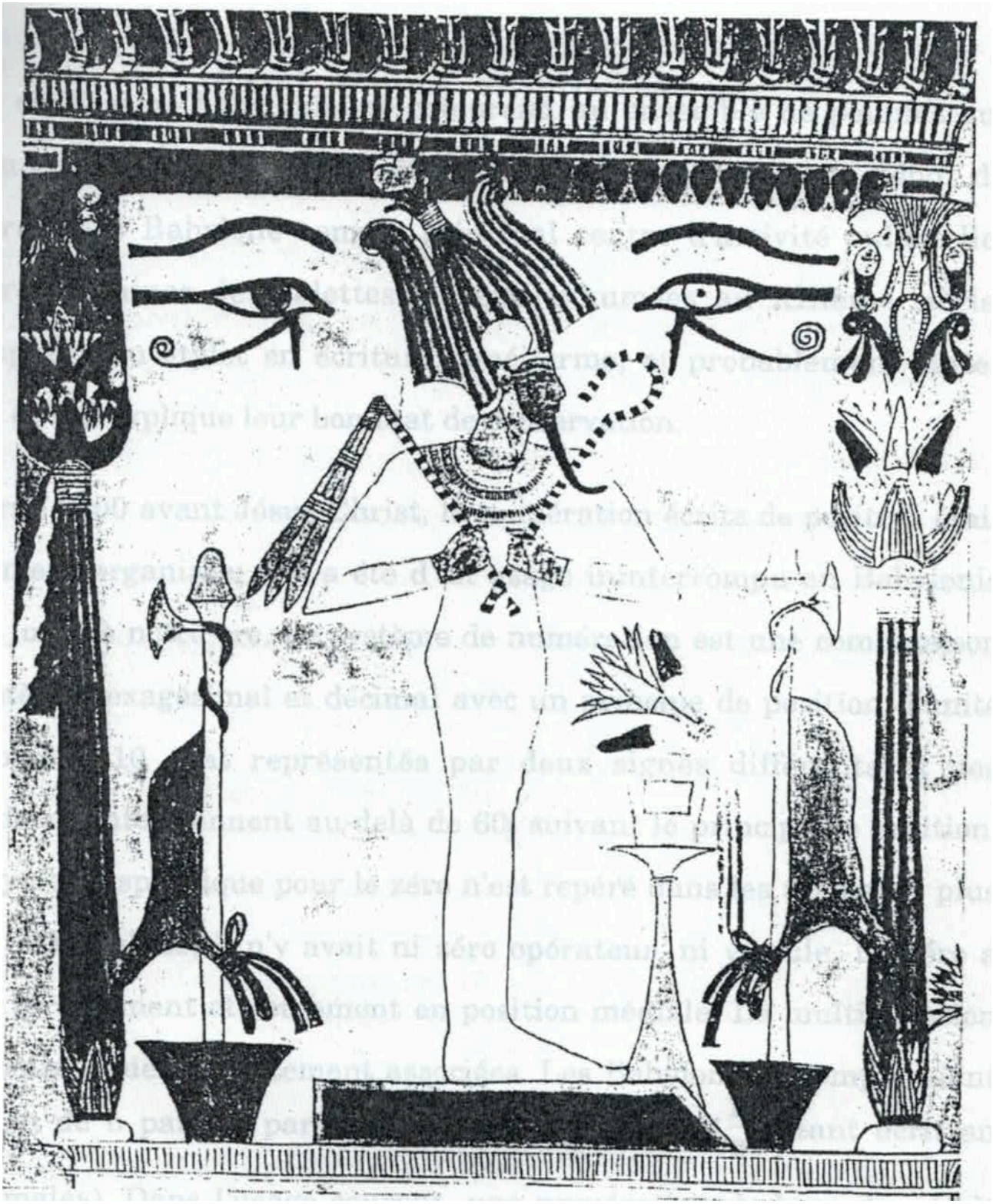
soit $4 \div 15 = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$

Quand on effectue une division dont le quotient est entier, on peut, pour le trouver, procéder par duplications successives du diviseur. Si le quotient est composé d'un entier et d'une fraction, on ne peut pas procéder par médiations successives du diviseur pour déterminer la partie fractionnaire. Il n'y a de solution que si le dividende et le diviseur étant premiers entre eux, le diviseur est une puissance de deux.

Reprenons les exemples traités. La division 19 ÷ 8 est très simple puisque 8 = 23 ; la résolution est faite par duplications et médiations. Ensuite, la division 16 ÷ 3 donne par duplications la partie entière du quotient et

1/3 est visiblement la partie fractionnaire. L'exemple 4 ÷ 15 ne peut être résolu par médiation, la fraction étant irréductible et 15 n'étant pas une puissance de 2. L'importance mathématique de ce type de calcul a dû échapper à ses concepteurs. Il nous apparaît toutefois intéressant de constater qu'il n'apparaît pas a priori inconcevable aux Egyptiens d'effectuer un calcul avec un dividende inférieur au diviseur.

La division par deux est aussi un des premiers sujets de l'apprentissage de la division à l'école élémentaire de nos jours, que cela soit dans les manuels scolaires ou dans les leçons données par des instituteurs dès le cours élémentaire deuxième année, c'est-à-dire à des enfants âgés de 8 ans environ. Il est intéressant de faire le parallèle entre ces conceptions primitives de duplication et de médiation et le schème partager-distribuer, qui fonctionne très bien pour les enfants dans la vie courante : partager une pomme, une banane ou un gâteau en deux, puis encore en deux, pour créer des parts. Dans les procédures d'approche, par tâtonnements successifs, on retrouve ce type de démarche.



OSIRIS SOUS LES YEUX D'HORUS (tombe de Sennedjem)

(Illustration issue de l'ouvrage de Guitel G., p. 79, 1975)

1-2 - Le produit de 1/a par b : les civilisations babyloniennes et sumériennes

La civilisation babylonienne comprend un ensemble de peuples qui ont vécu en Mésopotamie entre 5000 avant Jésus-Christ et le début de notre ère, avec Babylone comme principal centre d'activité culturelle. Plusieurs centaines de tablettes d'argile exhumées au XIXe siècle sont frappées au stylet en écriture cunéiforme, et probablement cuites ensuite, ce qui explique leur bon état de conservation.

Vers - 2000 avant Jésus-Christ, la numération écrite de position était parfaitement organisée ; elle a été d'un usage ininterrompu en Babylonie presque jusqu'à notre ère. Le système de numération est une combinaison d'un système sexagésimal et décimal avec un principe de position : l'unité et le nombre 10 sont représentés par deux signes différents et des combinaisons interviennent au-delà de 60 ; suivant le principe de position. Aucun symbole spécifique pour le zéro n'est repéré dans les textes les plus anciens. A Babylone, il n'y avait ni zéro opérateur, ni virgule. Le zéro a été noté tardivement et seulement en position médiale. La multiplication et la division étaient étroitement associées. Les Babyloniens remplaçaient la division de b par a, par le produit de 1/a par b (1/a) étant écrit en sexagésimales). Dans l'usage courant, une numération de base dix, était utilisée progressivement, qui ne faisait que traduire la numération parlée acadienne qui avait survécu. La numération sexagésimale, se maintient dans l'usage savant. Malgré la maladresse dans le choix de 60 (c'est une écriture assez lourde, de conception archaïque pour les nombres entiers de 1 à 59), les Babyloniens ont réussi à rendre bénéfique cette complication en inventant des procédés de calcul d'une grande originalité. Les Sumériens ont profité que leur numération était de position, et ont joué sur deux aspects : le premier, est le fait que 10 apparaît dans l'écriture des nombres comme une base auxiliaire, et le second est le fait que, comme 60 a douze diviseurs, la table de multiplication peut servir à effectuer certaines divisions avec une meilleure aisance que les processus égyptiens.

Guitel G. (p. 350, 1975) nous dit que pour effectuer une division par n ($n \leq 60$, et diviseur de 60), les Babyloniens possédaient des tables qui associaient à n l'expression de 1/n, écrit en numération sexagésimale. La plus ancienne de ces tables a été découverte à Tello et publiée par Delaporte dans la Revue d'Assyriologie. Thureau-Dangin (1912) a reproduit les premières et dernières lignes de ce texte, restitué en partie, et qui peut remonter à une date un peu antérieure à la première dynastie babylonienne :

2 igi 30	La 2ème partie est 30
3 igi 20	La 3ème partie est 20
4 igi 15	La 4ème partie est 15
5 igi 12	La 5ème partie est 12

6 igi 10	La 6ème partie est 10
7 igi nu	La 7ème partie n'est pas (convertible)

et ainsi de suite jusqu'à :

59 igi nu	La 59ème partie n'est pas (convertible)
1 igi 1	La 60ème partie est 1.

(*On n'explicitera pas ici dans quel type d'écriture ce document a été écrit.)*

Les Babyloniens appelaient ***igû*** le premier nombre et s***ibû*** le second. Le produit de ces deux nombres est toujours égal à 1, ils sont donc inverses. Voici maintenant un exemple d'usage de ces tables : soit à diviser m par n (m et n entiers) et supposons que n soit un nombre et p l'expression sexagésimale de 1/n qui figure sur la table. Connaissant p, il suffira de "le porter à m", c'est-à-dire de le multiplier par m, en se servant des tables de multiplication, le produit obtenu sera le quotient exact de m par n, exprimé en sexagésimales.

En effet, **m/n = m x 1/n**

L'usage des tables permet ainsi de faire une multiplication d'un nombre avec une fraction exprimée en sexagésimales. En général, les calculs étaient destinés à présenter des éléments du système métrologique, lequel était presque toujours construit à partir de nombres ne comportant pas d'autres facteurs premiers que 2, 3 ou 5.

La multiplication est exécutée en se référant à des tables, sans doute établies à l'origine par additions successives et l'utilisation des tables réciproques permet de remplacer les divisions par les multiplications. Ce type de procédure existe actuellement dans les classes d'écoles élémentaires. Une illustration intéressante de la plus ancienne division qui soit parvenue jusqu'à nous remonte à environ quatre mille ans. Guitel (1975) nous signale une étude de celle-ci, parue dans la Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale, qui nous montre une tablette sumérienne, remontant à 2500 avant Jésus-Christ, dont l'interprétation est due à Maurice Lambert. On y fait mention du dividende, du diviseur, du quotient et même du reste, mais pas de la technique opératoire de l'opération. La forme générale révèle des divisions successives qui peuvent être exécutées à l'aide de soustractions successives. La simplicité de cette division est caractérisée par un diviseur inférieur à dix, et un dividende, multiple des unités fondamentales.

La numération babylonienne comporte donc des fractions placées sur le même pied que les nombres entiers, d'où le fait qu'il n'y ait pas de signe analogue à notre virgule. La manipulation des fractions sexagésimales était communément utilisée, aussi bien que les nombres entiers. Enfin,

comme 60 a beaucoup de diviseurs, le principe de position des Babyloniens donne à ces diviseurs un rôle privilégié qui n'existe pas chez les Egyptiens dans l'écriture des fractions. Les Babyloniens excluent les inverses des nombres qui ne sont pas produits des facteurs premiers de 60 et ne s'écrivent pas 2p 3q 5m (avec p, q, m, entiers), car ces inverses n'ont pas de développement fini dans la base 60.

Les Sumériens, puis les Babyloniens ont ainsi disposé de la première numération organisée en système :

-ils avaient des unités de mesure pour le temps, le cercle, les angles, cohérentes avec la base du système et cohérentes entre elles ; les fractions ou nombres étaient exprimés en soixantièmes, soixantièmes de soixantièmes etc.

-les fractions sexagésimales en usage chez les mathématiciens et astronomes ont été utilisées jusqu'au moment de l'apparition des fractions décimales, voire au-delà.

Les Babyloniens étaient confrontés à une impasse pour le calcul de certaines racines carrées. Du fait de leur système de numération, il était impossible d'opérer certaines divisions. Remarquons aussi que le système sexagésimal était au service des spécialistes qui étaient capables d'effectuer des calculs compliqués.

Finalement, le scribe sumérien d'après Guitel, quand il voulait effectuer la division m/n, cherchait par tâtonnement le nombre qui multiplié par n donnait un produit contenu dans m, et le plus grand possible, c'est à dire suivait une méthode identique à celle que les élèves pratiquent encore de nos jours : la recherche du nombre de fois où le diviseur est contenu dans le dividende, par encadrements successifs éventuellement.

1-3 - Quelques tentatives contre le monopole des fractions sexagésimales : Diophante

La connaissance des mathématiques grecques pose des problèmes de sources. Hormis quelques fragments de papyrus alexandrins, il n'y a pas de manuscrits originaux. Vers le VIe siècle avant J.C., en contact avec les peuples orientaux, de Babylone et d'Egypte, les Grecs ne se contentent pas d'assimiler leurs connaissances, mais rendent les mathématiques abstraites et déductives ; ils sont avant tout des géomètres.

Le système attique a progressivement été remplacé par le système ionique. Son utilisation s'est généralisée à Alexandrie (dès le IIIe siècle avant J.C.). C'est un système décimal de numération alphabétique, additif, non positionnel, formé des 24 lettres de l'alphabet grec (d'origine phénicienne) plus trois autres signes.

Le système grec se prête difficilement à l'écriture des fractions, mais il existe un symbole pour ½. Comme les Egyptiens, les Grecs sont tentés de n'utiliser que les fractions unitaires. Le

dénominateur est marqué par un accent.

D'autres tentatives furent faites, mais aucune ne réussit à s'imposer jusqu'à ce que Diophante (début de notre ère) introduise une notation non ambiguë : il place le dénominateur légèrement au-dessus du numérateur. La pratique du calcul des quantièmes chez les Egyptiens étant difficile, les astronomes grecs préfèrent recourir au système d'écriture des fractions des Babyloniens et adoptent dans leurs calculs les fractions sexagésimales.

Le système grec peut être utilisé pour effectuer les opérations fondamentales d'arithmétique de multiplication ou de division, à condition qu'elles ne portent pas sur des nombres trop grands. On sait aussi que les fractions sexagésimales étaient employées (Guitel,1975).

La numération écrite de l'époque avait l'inconvénient de sa simplicité. La moindre représentation chiffrée exigeait une répétition démesurée de chiffres identiques. "Pour le nombre 7699 par exemple, il fallait ainsi mettre en jeu 31 symboles" (Ifrah, p.175, 1985). A partir du VIe siècle avant J.C., les Grecs simplifièrent leur notation numérique en introduisant un chiffre spécial pour 5, un autre pour 50, un troisième enfin pour 500, puis 5000, etc… Ils abandonnèrent peu à peu les anciennes formes graphiques et les remplacèrent par des lettres alphabétiques. Aucun chiffre spécial n'est attribué à l'unité et à chaque puissance de sa base. En introduisant des chiffres supplémentaires à leur liste initiale, les Grecs privèrent celle-ci de toute possibilité opératoire.

Soulignons enfin que le système grec de numération étant trop compliqué pour effectuer facilement les opérations par écrit, ces opérations sont fréquemment effectuées sur un abaque, table sur laquelle des lignes parallèles figurent les unités, les dizaines, les centaines etc... L'abaque sera largement utilisé par les Grecs et par les Romains dans l'Occident médiéval chrétien, même après l'introduction de la numération décimale de position qui est la nôtre actuellement. La numération grecque savante a pu s'adapter à la notation de la numération sexagésimale, ce qui lui a permis de transcrire très facilement les tablettes babyloniennes ; naturellement cela a prolongé leur emploi.

1-4 - Exemple d'une méthode de calcul chinoise

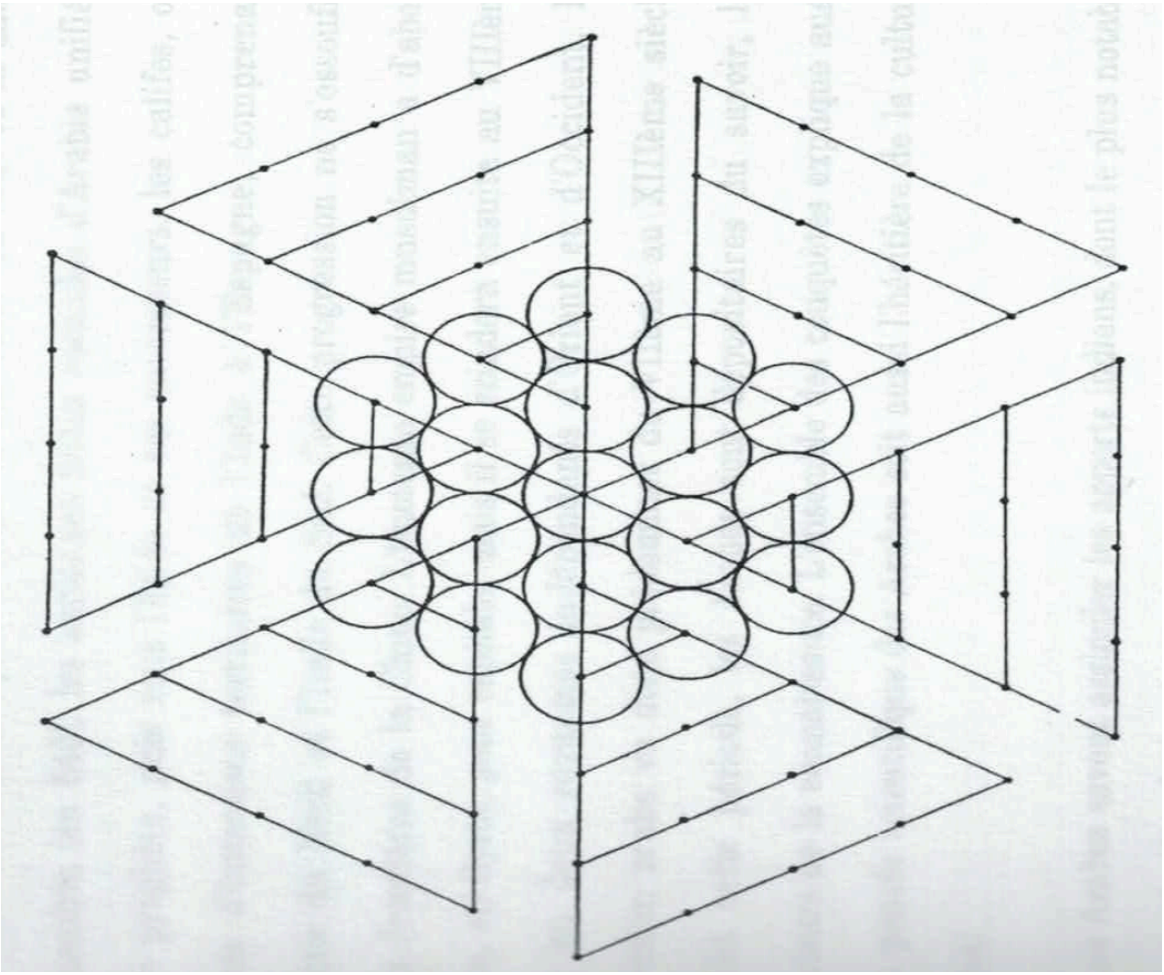
Les calculateurs du temps de Han, (-206 avant J.C, +220 après J.C.), utilisaient 271 fiches qui, serrées dans leurs mains, formaient un faisceau hexagonal. Ces fiches servaient à figurer les nombres ; aucun chiffre du reste n'était inscrit sur leur surface. Une fiche ne valait que 1, et lorsqu'il s'agissait d'effectuer une multiplication ou une division, on disposait ces fiches sur une surface plane, les unes en long, les autres en travers. On en saisissait ensuite en un instant la disposition. Le système consistait en une alternance dans la direction des fiches. Sans s'étendre davantage sur l'explication de la méthode employée, on ne doit pas passer sous silence l'invention de cette remarquable numération figurée. C'est cette présentation qui est devenue classique sur leur table à compter, c'est elle qui a permis ensuite d'écrire les nombres sous forme de monogrammes.

Sachant que, dès le temps des Han (-206 avant J.C., +220 après J.C.), les mathématiciens chinois savaient effectuer sur la table à compter multiplication, division et extraction de racines, exposons maintenant (d'après Guitel, 1975) ce qu'était pour eux la technique de la multiplication, qui conditionne celle de la division. Le commentaire écrit que les Chinois ont laissé de leur technique opératoire est très bref, et peu clair ; par ailleurs leurs dessins, fort nombreux, restituent les différentes étapes de l'opération. Cette conception suit aussi celle de Leibniz sur sa "théorie de la multiplicatrice", et part de la définition du produit de deux nombres, comme suit :

Soit à multiplier 973 par 746. Par définition, il faudra additionner 746 nombres égaux à 973. On profite de ce que le multiplicateur de l'opération se décompose en : 7 centaines 4 dizaines 6 unités.

Dans ces conditions, le produit de : 973 par 7 centaines pourra être remplacé par le produit de 97300 par 7. En déplaçant d'un bloc le multiplicande de deux rangs vers la gauche, on passe de 700 additions à 7 additions. Ce sont les suites de cette présentation naïve qui impliquent une présentation abstraite de l'opération. La table à calcul chinoise, vaste échiquier sur laquelle on plaçait les fiches à calcul, a favorisé de telles opérations. En fonction du nombre des chiffres des nombres à diviser ou à multiplier, on procédait à des décalages du diviseur ou du multiplicateur.

Déjà, le maniement de la table à compter exigeait un effort mental de qualité. On comprend dans ces conditions que l'usage du boulier pour la pratique des opérations telles que la multiplication, ou la division, ait été une grande invention. Un effort mental était exigé de l'opérateur quand il utilisait la table à compter, celle-ci ne peut ainsi qu'être antérieure au boulier.



Faisceau hexagonal" (Guitel, Planche n°37, p. 515, (1975)"

1-5 - Les intermédiaires entre l'Inde et l'Occident : le renouveau apporté par les Arabes

Moins d'un siècle après la mort de Mahomet (en 632) et la chute d'Alexandrie (en 640), les anciennes tribus nomades d'Arabie unifiées par le prophète, puis sous l'égide de ses successeurs, les califes, ont conquis d'immenses territoires de l'Inde à l'Espagne, comprenant l'Afrique du Nord et l'Italie du Sud. Cette progression ne s'essouffle qu'aux frontières de la Chine. L'immense empire musulman a d'abord Damas, en Syrie, pour capitale, mais il se scindera ensuite au VIIIe siècle en deux royaumes indépendants d'Orient et d'Occident. La civilisation arabe va donc prédominer du VIIe au XIIIe siècle. Pendant cette période, les Arabes sont dépositaires du savoir, les promoteurs de la connaissance. L'ensemble des conquêtes explique aussi que la pensée scientifique des Arabes soit aussi l'héritière de la culture grecque.

Les Arabes savent assimiler les apports indiens, dont le plus notable est la numération

décimale de position avec usage du zéro. Celle-ci va être popularisée par les traités du célèbre Al-Khwarizmi, mais elle subsistera longtemps sous la forme littérale à côté des deux systèmes de chiffres arabes d'Orient et d'Occident apparus au cours du Xe siècle. "*La contribution des mathématiques arabes est absolument décisive dans le domaine de l'algèbre, qu'ils constituent comme une discipline autonome. Elle est à la fois une science théorique, une technique algorithmique, et un art du calcul. Citons les noms prestigieux, d'Al-Kariji, d'Al-Khayyam, D'Al-Kashi...*" (Dahan-Dalmenico, Peiffer, p.22, 1986).

Quand ils furent mis en présence de la numération et des méthodes de calcul venues de l'Inde, les Arabes avaient eu assez d'esprit pour en apprécier les avantages, reconnaître leur supériorité et les adopter aussitôt. Les chrétiens d'Europe, en revanche, se sont montrés si attachés à leurs systèmes archaïques, si réticents devant la nouveauté, qu'il a fallu attendre des siècles avant que le triomphe de "*l'algorisme*", comme on appelait alors le calcul écrit, fut enfin total et définitif.

Aux alentours de 1580, Montaigne écrivait : "*Je suis né et nourry aux champs parmy le labourage ; j'ay des affaires et du ménage en main depuis que ceux qui me devançaient en la possession des biens que je jouis m'ont quitté leur place. Or, je sçay compter ny a get ni a plume*" (Essais, livre II). Cet homme, si érudit, ne savait pas compter. L'influence indienne n'a gagné l'Europe que plus d'un millénaire après son existence. Les Arabes, médiateurs entre l'Inde et l'Occident, avaient d'abord commencé par s'intéresser aux numérations alphabétiques, grecque et juive, dont ils adaptèrent l'usage aux 28 lettres de leur propre alphabet. Par l'intermédiaire des Grecs et des chrétiens de Syrie et de Mésopotamie, ils récupérèrent aussi le système sexagésimal positionnel et le zéro des savants babyloniens, qu'ils adoptèrent en l'adaptant à leur propre écriture. Puis ils adoptèrent, à la fin du VIIe siècle, l'ensemble du système numérique indien : chiffres, numération décimale de position, zéro et méthodes de calcul.

Référons-nous ici à l'étude de Hantouche (1984) sur les "problèmes posés par l'acquisition des décimaux", notamment sa traduction d'une partie du travail d'Al-Kachi, considéré comme l'inventeur des décimaux sous leur forme actuelle. Les premiers écrits parvenus datent du Xe siècle après Jésus-Christ. Soulignons en outre que les Chinois travaillaient déjà sur un système décimal, 13 siècles avant Jésus-Christ. Al-Kachi, né vers 1370, se rend à Sarmacande en Iran vers 1420 ; il explique dans son ouvrage "La clé de l'Arithmétique" (1427) la conversion des fractions sexagésimales en fractions décimales.

Al-Kwarizmi (780-850), un des premiers mathématiciens arabes, pour faire des opérations de division sur des fractions sexagésimales "fait d'abord une conversion en nombres entiers (base dix), les exprime sous forme d'unités du dernier ordre, effectue les opérations dans le système des entiers (base dix) et les convertit" (Hantouche, Thèse, 1984). Al-Kachi, lui, pour vérifier le résultat d'une multiplication utilise la division. Latinisé, le nom d'Al-Khowarizmi fut transformé successivement en *Alchoarismi*, puis en *Algorismi, Algorismus, Algorisme*, et enfin en *Algorithme* (Ifrah, p. 284, 1985).

Le développement de l'opération avant les années 1000 reste ainsi attaché à la conception des nombres sexagésimaux et des calculs qui en découlent. La présentation donnée est essentiellement faite sous forme fractionnaire. Il paraît plus intéressant de voir, et ceci après que l'apport des Arabes aie été introduit en Europe, comment les longues divisions étaient accomplies après l'introduction de nos nombres modernes, c'est-à-dire environ dans les années 1000.

2 - LA DIVISION APRES LES ANNEES 1000

2-1 - La première introduction des chiffres arabes en Europe

Depuis la chute de l'Empire romain jusqu'à la fin du Moyen Age, "l'instruction" en Europe occidentale, est restée très rudimentaire. Les rares privilégiés à qui on prodiguait un enseignement, apprenaient d'abord à lire et à écrire. On leur expliquait ensuite la théorique. Puis, on leur donnait des cours, très sommaires d'astronomie et de géométrie. Et, en même temps, on leur apprenait à compter sur les doigts, à noter et à lire les chiffres romains. Mais on n'enseignait rien de plus, l'initiation à l'art de faire des calculs ne faisait même pas partie du programme.

Il faut dire que la pratique des opérations arithmétiques, même des plus élémentaires, n'était pas, en ce temps-là, à la portée de tout le monde. Elle était alors le domaine réservé de spécialistes, à qui de longues et fastidieuses études avaient transmis l'usage mystérieux, et compliqué, des vieux abaques romains. Le grand respect dans lequel ces calculateurs étaient tenus à cette époque, montre d'ailleurs à quel point **les techniques opératoires étaient difficiles**. Une multiplication pouvait demander plusieurs heures de travail.

Ifrah (1985) raconte dans son livre "Les chiffres", qu'un riche marchand du Moyen Age, suffisamment enrichi pour faire donner une instruction commerciale à son fils, alla un jour consulter un éminent spécialiste pour savoir à quelle institution il fallait confier le jeune homme. La réponse du professionnel semblera certainement renversante pour l'homme moyen du XXe siècle : "*Si vous voulez vous contenter de lui faire apprendre la pratique des additions ou des soustractions, n'importe quelle université allemande ou française fera l'affaire. En revanche, si vous tenez à pousser son instruction jusqu'à la multiplication ou la division (si tant est qu'il en soit capable !), alors il vous faudra l'envoyer dans les écoles italiennes*".

Il est vrai que l'Italie était à cette époque en plus grand contact avec les Arabes et les Byzantins et que ses écoles s'étaient rapidement spécialisées dans les opérations complexes. Tandis que les Universités allemandes ou françaises ne s'occupaient que des opérations courantes, et cela encore aux XIVe et XVe siècles.

Cette situation est restée substantiellement la même dans les administrations européennes,

pendant les périodes suivantes, à travers le Bas Moyen Age et la Renaissance, jusqu'au XVIIe et XVIIIe siècles, comme en témoigne l'histoire d'un certain Samuel Pepuys que cite Ifrah (p.290, 1985) : "*Celui-ci était fonctionnaire attaché à la Marine de Guerre britannique et sortait tout droit de l'Université de Cambridge. Il fut nommé par la suite au Secrétariat de l'Amirauté et acquit, en 1662, la responsabilité des marchés avec les fournisseurs. Doté d'une instruction très correcte, ce "Clerc des Actes" se trouva pourtant incapable d'effectuer les calculs nécessaires à la vérification des achats de bois de charpente conclus pour la Marine anglaise ! Il jugea alors nécessaire de retourner à l'école, ou plutôt de parcourir l'Europe, pour apprendre à bien maîtriser l'art du calcul. Et comme les opérations ne se faisaient, dans les administrations anglaises que sur des tables à jetons, il fut longtemps obligé de se lever à quatre heures du matin pour étudier et assimiler les règles correspondantes. Il parvint finalement à dominer son handicap et entraîna son épouse dans cette étude* ». Et voici ce qu'il écrivît dans son journal en 1663 : "*Ma femme est maintenant capable d'effectuer sans peine les additions, les soustractions et même les multiplications. Mais je n'ose pas encore la troubler avec la pratique des divisions*" (Ifrah, p.290, 1985).

2-2 - Le Haut Moyen Age Chrétien

On peut avoir la vision que, après le "miracle" grec, dix siècles d'ignorance, d'obscurantisme et d'oubli des joyaux théoriques de la pensée hellène, leur brusque redécouverte par les humanistes de la Renaissance a enfin permis l'émergence de la science moderne. La richesse intellectuelle et scientifique de la civilisation arabe prouve déjà le schématisme et même la fausseté d'une telle vision. De plus, d'après Guitel (1975), tous les chercheurs-historiens et médiévistes réfutent aujourd'hui l'homogénéité de cette longue période allant de la chute de l'Empire romain d'Occident, en 476, à la prise de Constantinople par les Turcs, en 1453 et qu'on appelle Moyen-Age.

En fait, les premiers siècles (du VIe au Xe) se rapprochent de cette sombre description. Après la chute de Rome, l'Europe voit s'ouvrir une ère de récession économique et de désordre politique. C'est l'époque des grandes invasions, immenses mouvements migratoires qui ne favorisent aucune cohérence organique, aucune stabilisation culturelle propice à l'activité intellectuelle. L'Europe se trouve pratiquement sans contacts avec l'empire romain d'Orient.

Ce n'est donc pas sous cette période que l'on trouve des influences pouvant déterminer des changements intéressants dans le sujet qui nous intéresse.

2-3 - La division courte

Parmi les premières méthodes écrites, la division courte anglaise (d'après Smith, 1958), qui était basée sur la reconnaissance des produits dans les colonnes des tables de multiplication, a été connue comme une division dite par "*colonnes*", par "*règles*", ou par les "*tables*", ou même comme division dite "*orale*", ou de "*tête*." Les premiers livres imprimés en Italie ont été publiés dans un monastère à Subiaco près de Rome en 1465. Treize ans plus tard (1478), un livre

anonyme d'arithmétique imprimé à Treviso, près de Venise, contient des techniques de calcul. Entre autres, l'illustration de la méthode de division dans le livre de Treviso est la suivante :

Lo partitore	. 2.	7624	
		0	lauanzo
La parte		3812	

qui veut dire : 7624 ÷ 2 = 3812, avec 0 au reste. La technique utilisée est celle de la méthode dite "*Galley*" (voir chapitre 2-6), le diviseur est cependant ici à gauche du dividende. La présentation utilisée par Sfortunati (1534) pour un cas similaire est signalée dans l'exemple suivant (signalé dans son Arithmétique) :

P 14 («P» signifie *parte*)
1037382
$74098\frac{10}{14}$

ce qui voulait dire : 1037382 : 14 = 74098 10/14

On note ici le reste présenté **sous forme fractionnaire.**

Dès lors, la méthode fut plus généralement utilisée avec un diviseur à un chiffre, et n'était pas très populaire auprès des professeurs (d'après Smith, 1958), qui préféraient le recours aux tables de division.

2-4 - Méthode de Gerbert

Gerbert (940-993), tour à tour précepteur et conseiller de l'empereur Otton III, futur pape Sylvestre II (en 999), voyage en Espagne entre 967 et 969 et y fréquente les écoles arabes. C'est là qu'il aurait appris le système de numération indo-arabe. En France, on comptait encore de façon digitale ou par le système de jetons. Gerbert aurait construit une table à calcul, ou abaque, dans laquelle il aurait remplacé dans chaque colonne le nombre total de jetons par un seul, qui portait au dos le nombre de jetons substitués. C'est ainsi qu'il aurait introduit les chiffres arabes en Europe. La méthode des abacistes, dont Gerbert serait le promoteur, présente des facilités analogues à notre arithmétique de position, du moins pour l'addition et la soustraction, car la multiplication et la division restaient très compliquées (voir chapitre 4-3).

L'enseignement de Gerbert exerce une influence prépondérante sur les écoles de son temps. D'après Ifrah, (1985), c'est bien lui qui est à l'origine de la première introduction des chiffres arabes dans notre culture. Mais à chaque fois, qu'il a voulu faire prévaloir les procédés indo-arabes, Gerbert s'est heurté à une grande résistance, la plupart des clercs de l'époque ne pouvant accepter la supériorité d'une autre tradition. Les temps n'étaient pas encore mûrs pour une telle révolution

(voir chapitre 4-3).

Au cours du XIe et du XIIe siècle, grâce à l'intervention des Juifs en Europe, on se mettra à faire des opérations comme les Arabes, en les traçant sur du sable et de la poussière. L'**abacisme** fera place à l'**algorisme**, qui, lui, utilise le zéro, la méthode arabe de division et d'extraction de la racine carrée.

Ces nouveaux procédés de calcul s'avéreront être un des apports capitaux pour la préparation intellectuelle en Occident, en particulier quand on se rappelle les complications de la logistique grecque.

Dès cette période, l'Italie méridionale jouit d'une situation privilégiée : la culture latine autochtone s'allie aux vestiges d'une longue occupation byzantine, tandis que la proximité des Arabes, maîtres de la Sicile, crée des liens avec leur civilisation. L'école de Salerne, principalement tournée vers la médecine fut célèbre et des cours y étaient donnés en quatre langues : l'arabe, l'hébreu, le latin, le grec. Constantin l'Africain, ancien marchand de Carthage converti au christianisme, aurait réuni des manuscrits pour les ramener à Salerne ; finalement, il rédige des oeuvres en latin qui sont des traductions inavouées de l'arabe que l'on identifie aujourd'hui comme des ouvrages d'origine arabe. On assiste ainsi aux toutes premières infiltrations de la science arabe en Occident.

Une des plus anciennes méthodes qui ait été utilisée dans les divisions longues, est donc attribuée à Gerbert (980), bien qu'il soit incertain qu'il l'ait réellement créée, et qu'il n'utilisât pas le zéro. Cela peut être illustré par le simple cas de 900 ÷ 8. Le processus consiste à diviser 900 par (10 - 2) , 2 étant le complément du diviseur (source du document Smith, p.134, 1958) :

$$10 - 2)\ 900\ (90 + 18 + 3 + 1 + \frac{1}{2} = 112\ \frac{1}{2}$$

Avec le concours de R. Gras (Université de Rennes I), nous proposons la décomposition de ce calcul de la façon suivante :

900 - 180
180
180 - 36
36
30 - 6
6 + 6 = 12
10 - 2
2 + 2 = 4, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Pour diviser 900 par 8, on prend le premier diviseur (par 10) de 900, soit 90, que l'on multiplie par 8 ou (10 - 2), et on ajoute le reste, soit 180 (180 + 720 = 900). La procédure se poursuit ensuite de la même façon, en divisant à chaque fois le reste par 10.

$(10 - 2)(18) + 36 = 900$ soit $180 \div 8 = 18 + \frac{36}{8}$

$(10 - 2)(3) + 12 = 900$ soit $36 \div 8 = 3 + \frac{12}{8}$

$(10 - 2)(1) + 4 = 900$ soit $12 \div 8 = 1 + \frac{4}{8}$

d'où $900 \div 8 = (90 + 18 + 3 + 1)\frac{4}{8}$

$= 112 \frac{1}{2}$

La même méthode est une des trois données par Adelard de Bath ("*Regulae abaci*", 1120), qui l'attribue à Gerbert. Ces trois méthodes sont la "*divisio ferrea*", comme celle mentionnée ci-dessus; "la *« divisio aurea*", qui ressemble à notre division longue; et enfin la "divisio *permixta*", qui serait une méthode intermédiaire dont nous n'avons trouvé aucune illustration dans nos lectures.

2-5 - Division par facteurs

Une autre méthode de division qui était connue au Moyen Age consistait à utiliser les facteurs du diviseur, et était connue sous les termes "*per repiego*". Par cette méthode 216 ÷ 24 se réduisait à 216 ÷ 8 ÷ 3, celle-ci prônant d'apprendre précisément les tables, et montre que l'usage étant de préserver les diviseurs à un chiffre qui pouvaient être utilisés "*per tavoletta*". D'après Smith (1958), l'illustration de Pacioli (1494) est donnée avec 9876 ÷ 48. Il divise en premier 9876 par 6, le résultat étant 1646. Il divise alors 1646 par "'autre nombre de "*repiego*", et obtient 205 6/8 ou 205 ¾. **Là encore, chaque division est composée d'un diviseur à un chiffre**

Remarquons ici que cette décomposition est parfois en usage actuellement à l'école

élémentaire, mais pas communément enseignée.

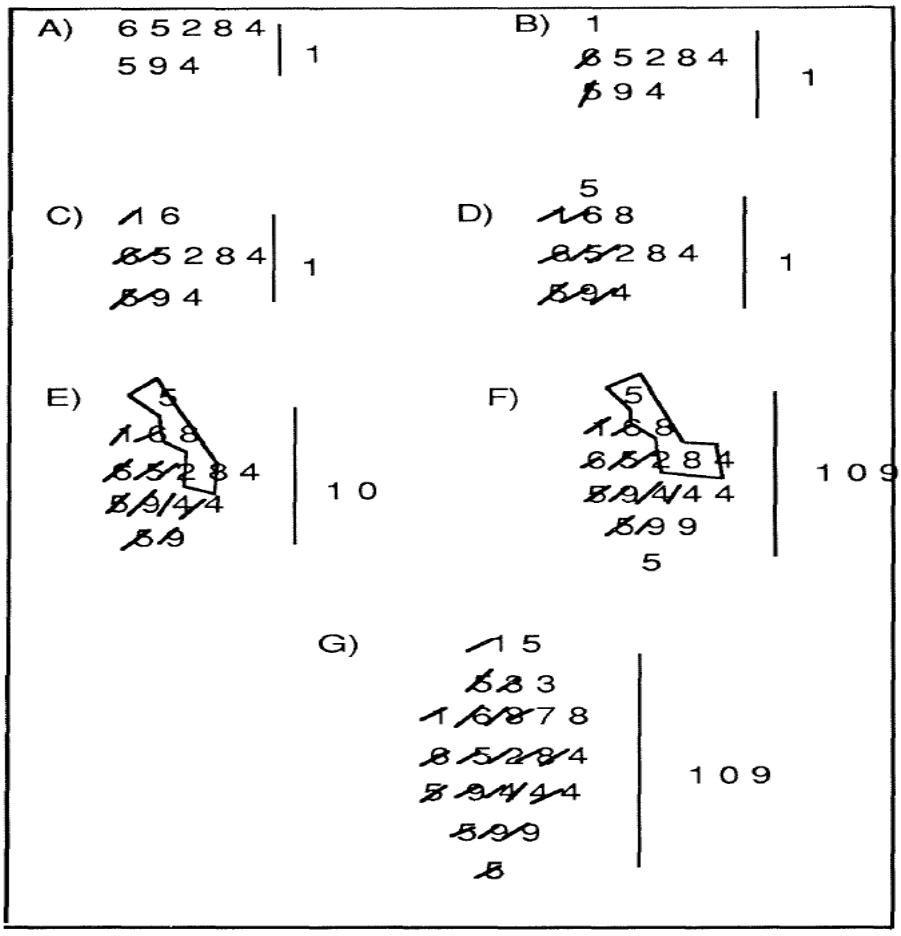
Si le diviseur était un multiple de 10, les auteurs du XVIe siècle, avaient recours à "*partire per il scapezo*", c'est-à-dire qu'ils effectuaient une "division par découpage" du dividende. Ainsi, pour diviser 84 789 par 20, le dividende était coupé par une barre, (soit 84 78/9), la première partie (soit 8478) étant divisée par 2 et le 9 étant divisé par 20.

2-6 - La méthode Galley ou "à rayures"

La méthode appelée **Galley**, batello, ou "*méthode des rayures*" fut en usage avant 1600 et semble être d'origine hindoue. Elle peut être illustrée ici par l'exemple : 65284 ÷ 594, comme celui donné dans l'Arithmétique de Treviso (1478).

Pour effectuer le travail clairement, nous interprétons les six premières étapes données séparément comme suit :

soit 65 284 ÷ 594 = 109 (reste 538)



Le travail est achevé par une explication de deux pages et demie (d'après Smith, 1958), et on a la conclusion suivante :

"C'est 65 284 ÷ 594 = 109 avec un reste de 538".

Nous nous proposons d'expliquer les étapes ci-dessus :

A) En divisant 65284 par 594, par exemple, le premier chiffre du quotient est 1. Il est écrit à la droite du calcul.

B) Le premier chiffre du diviseur est soustrait du premier chiffre du dividende, et les deux chiffres qui ont été utilisés sont alors rayés, le même procédé est utilisé à chaque fois dans les étapes suivantes du calcul.

C) 9 est soustrait de 15, ce qui donne 6, la retenue 1 est alors soustraite du chiffre placé en haut à gauche, soit 1.

D) 4 est soustrait de 12, ce qui donne 8, la retenue 1 est soustraite du 6, soit 5.

E) Le diviseur est alors réécrit avec des chiffres alors déplacés d'une "place" vers la droite. On considère alors 594 et 588, le deuxième chiffre issu du dividende étant inférieur au premier requiert le chiffre zéro au quotient.

F) On réécrit de nouveau le diviseur, de nouveau déplacé vers la droite du calcul, pour continuer le calcul. Notons que cette réécriture n'est pas horizontale, ce qui engendre une présentation générale assez compacte. Finalement, les étapes de calcul intermédiaires sont peu lisibles.

G) Le calcul achevé, on obtient le quotient à droite de la barre verticale, et le reste, composé des chiffres non rayés, résultats des dernières soustractions partielles.

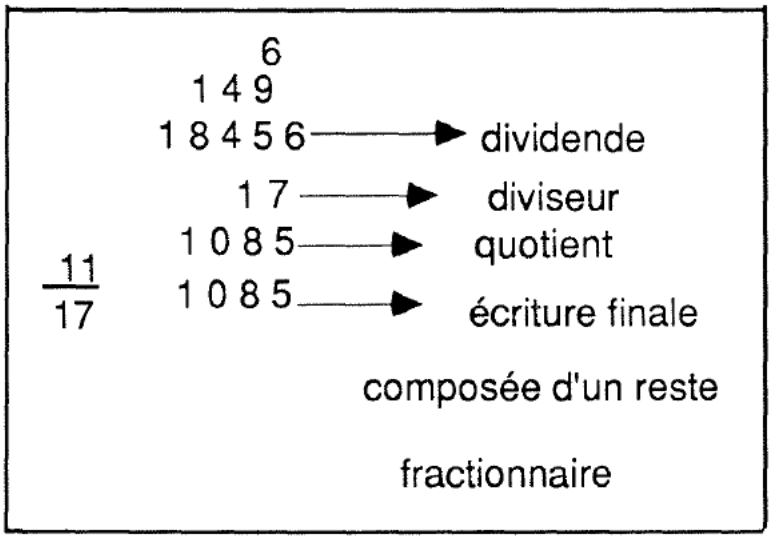
La complexité du calcul s'accroît d'autant plus que la "lecture" du nombre à considérer requiert une succession de chiffres placés de façon inégale d'une colonne à une autre, et d'une ligne à une autre. L'ensemble du nombre à considérer (le dividende partiel) est, de surcroît, placé en diagonale ; aucune lecture littérale de droite à gauche, ou de gauche à droite n'est possible. La question est ici de savoir si la suggestion de Smith concernant la compacité de cette présentation est due à l'économie de place voulue sur le papier (ce qui est une interprétation pour le moins originale !), ou à l'usage qui demandait d'aligner et de rassembler dans un même plan l'ensemble des chiffres utilisés dans le calcul. La procédure est ici liée à une somme de soustractions successives.

La présentation de l'algorithme actuel que nous connaissons a été introduit au cours du

quinzième siècle environ, la méthode "**Galley**" a continué cependant à fonctionner durant trois siècles encore.

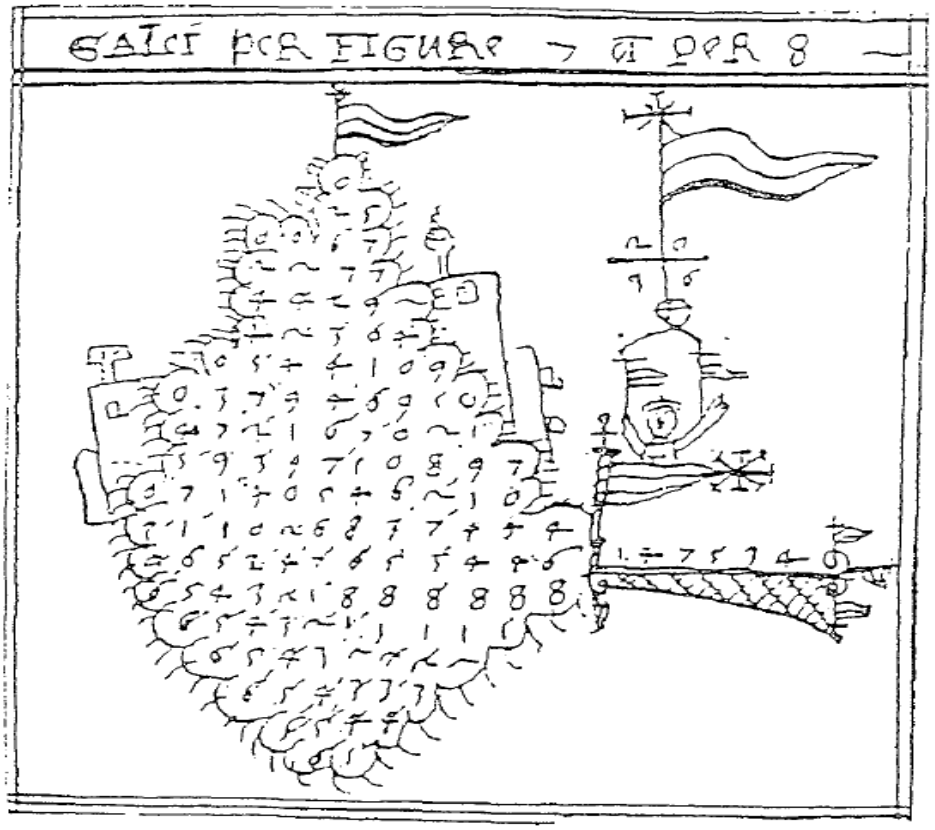
Maximus Planude (1340), fournit quelque lumière sur son origine première en disant que si cette division est difficile à exécuter sur du papier, ce n'était pas le cas cependant quand on utilisait l'abaque de sable. La nécessité de rayer certains nombres et d'en écrire d'autres à leur place augmente les risques de confusion, surtout quand il faut s'interrompre pour "reprendre" de l'encre. Sur un abaque de sable, il était d'après lui plus facile d'effacer les chiffres avec les doigts et d'en écrire d'autres à leurs places. Par ailleurs, dès l'introduction de l'encre et du papier, la présentation donnée change, au détriment de la lisibilité du calcul lui-même.

Cette méthode était adoptée par Fibonaci (1202), voici le cas de l'opération 18 456 ÷ 17 :



Si l'on veut comparer ce calcul à notre algorithme actuel, notons que les restes des dividendes partiels sont écrits au-dessus du dividende. Il faut lire 145 non pas en ligne, mais de façon "décalée", selon le principe de la méthode "**Galley**". Il faut lire le chiffre 9, comme étant un reste partiel d'une soustraction. Le reste est donné sous forme fractionnaire (11/17).

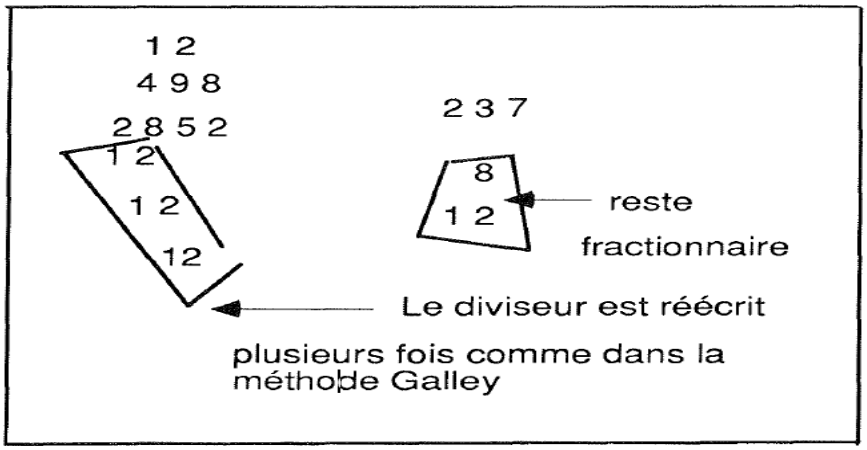
Les noms **Galea** et **Batello** réferaient à un bateau auquel le profil du travail de cette division ressemblait. Une illustration intéressante de cette ressemblance est notifiée dans un manuscrit de 1575, (voir ci-dessous). Tartaglia nous dit que les professeurs vénitiens avaient l'habitude de demander de telles illustrations à leurs élèves quand ils avaient terminé le travail (illustration donnée dans l'ouvrage de Cajori, p.487, 1970).



GALLEY DIVISION, 16TH CENTURY

Ce manuscrit fut écrit par un élève vénitien appelé Honoratus vers 1550-1600.

Cette méthode de division était utilisée par les auteurs arabes du temps de Al-Khowarizmi (825) avec quelques variations. Par exemple, Al-Nasavi (1025) utilisait la forme suivante pour 2852 ÷ 12 = 237 8/12.



Ce calcul se présente de la même façon que la méthode « **Galley »**, à la différence que le diviseur est réécrit à chaque fois horizontalement. Le début de cette division s'explique de la façon suivante :

Après avoir évalué le premier chiffre du quotient, soit 2, on effectue (de droite à gauche), 2 x 1 = 2, mais on ne raye pas les chiffres utilisés, et on n'inscrit pas le zéro. Puis il faut multiplier 2 par 2 et soustraire le résultat, 4, de 8, et écrire le reste au-dessus du 8. La suite se déroule selon les mêmes principes que ceux énoncés dans notre exemple précédent (division dont l'illustration est donnée dans l'ouvrage de Smith, pp. 41-42, 1958).

Le fait d'avancer le diviseur d'une place à droite chaque fois est ici visualisée d'une façon plus claire que les dispositions italiennes usuelles. Les auteurs latins médiévaux appelaient quelquefois cette caractéristique "*anterioratio*". Cette façon de faire n'était pas universelle, cependant Rudolff (1526) disait que les Français entre autres, plaçaient souvent le diviseur en bas du calcul, et une seule fois. Une fois établie, la méthode dite "**Galley**" était celle que préféraient les arithméticiens avant 1600, et qui était préconisée vers la fin du XVIIIe siècle. Smith précise que "si on trouve certains exemples de ces divisions sans que les chiffres soient effectivement barrés, c'est probablement par oubli" (p.139, 1958). En fait, le processus lui-même ne requiert pas obligatoirement de barrer les chiffres utilisés qu'il soit suffisamment maîtrisé ou non.

Que les chiffres soient rayés ou non, la méthode était choisie non seulement par certains commerciaux, mais aussi par quelques scientifiques comme Regiomontanus. Même un mathématicien aussi célèbre que Heilbronner au milieu du XVIIIe siècle, préférait cette méthode avec tous les longs exemples qui expliquaient les étapes de sa résolution.

Au XVIIe siècle, un peu plus tard, Hodder disait qu'il censurait cette méthode, car cette façon de diviser n'était pas linéaire, et il cite le témoignage de certains écrivains italiens des deux siècles précédents.

D'après Smith (1958), la méthode Galley serait encore enseignée dans les écoles mauresques de l'Afrique du Nord, et à coup sûr dans d'autres régions du monde arabe.

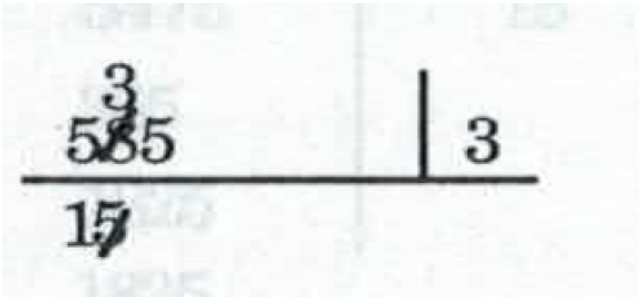
2-7 Principes de quelques divisions en usage en 1711

Nous choisissons ici de présenter quelques algorithmes qui existaient au moment où la division dite "**Galley**" était en usage en France. Ces informations nous ont été données par G. Brousseau (Université de Bordeaux I).

Division "à l'espagnole" en 1711

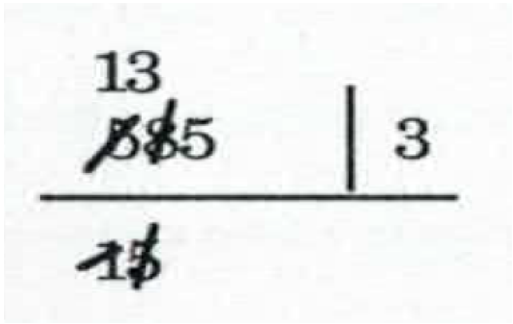
Exemple: 585 ÷ 15 =

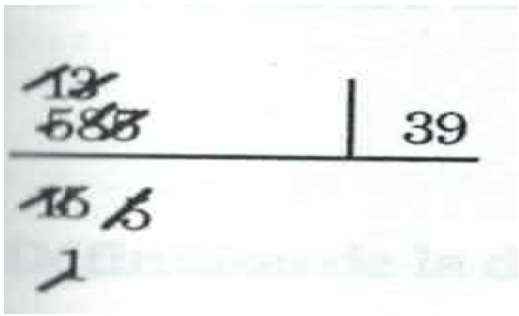
Il s'agit d'avancer le diviseur sous le dividende comme dans la méthode "française". On évalue alors le premier chiffre du quotient, ici 3.



On commence par la droite (au lieu de la gauche comme dans la méthode "française"). 3 fois 5 égal 15; ôté de 18, il reste 3. Les chiffres 8 et 5, alors utilisés, sont rayés.

Ensuite, le calcul se poursuit avec : 3 fois 1 égal 3, avec 1 de retenue qui font 4, ôté de 5, cela fait 1. On raye ainsi le 1 et le 5 et on écrit 1 au-dessus de 5.



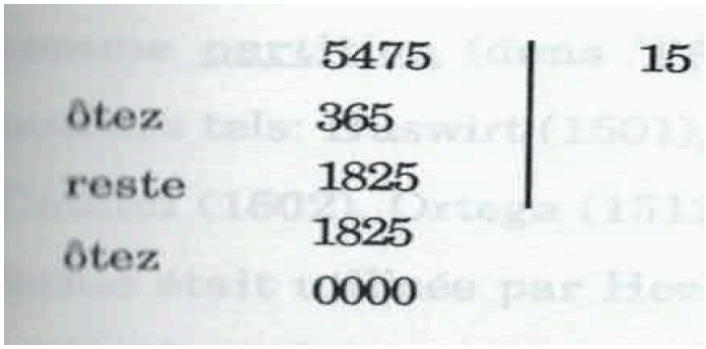


Enfin, en 535, combien de fois 15, 9 fois 5 égal 45 ôté de 45, il reste 0 et 13 ôté de 13, zéro aussi.

Le processus est le même que dans la méthode "**Galley** française", mais il requiert de

calculer de droite à gauche.

Division à l'italienne en 1711



Preuve : 365 x 5 = 1825.

Le produit est fait à part à droite du calcul. Le quotient est au milieu sur la même ligne que le dividende à gauche, et le diviseur à droite. Aucun chiffre n'est rayé. Cette méthode est proche de celle utilisée actuellement en France.

3 - PRINCIPES ET DESCRIPTIONS DE LA DIVISION

3-1 - Définition de la division.

Au regard des différents exemples que nous avons cités, et selon les périodes, la division est généralement considérée comme la quatrième des opérations fondamentales, la cinquième si la numération est incluse, ou la septième quand la duplication et la médiation sont considérées séparément.

En général, d'après Smith (1958), l'opération est connue aussi bien comme une division (1) avec des écrivains comme Fibonacci (1202), ou comme partition (dans "**l'Arithmétique**" de Treviso) ainsi que chez les auteurs suivants : Huswirt (1501), Ghaligai (1521), Stifel (1544), Scheubel (1545), Cataldi (1602), Ortega (1512), Savonne (1563) et Santa-Cruz (1594). Cette forme était utilisée par Heron, Pappus, et Diophante et par tous ceux qui utilisaient le terme *meri'zein,* (qui veut dire à partager), beaucoup d'auteurs utilisent les deux termes.

Nous trouvons chez Baker (1568) les mots "*deuision*" ou "*partition*", et Digges (1572) "to deuide or parte". Ils disent que la "*diuision sheweth onlely howe often the less summe is conteyned in the bigger*", ("la division montre seulement combien de fois la somme mineure est contenue dans la majeure", Digges, 1572), ou bien que "*Diuision doth search how oft the diuisor, in Diuidend*

may be quoted or found, whereof the quotient is the decidor, ("La division cherche combien de fois le diviseur peut être fractionné ou trouvé dans le dividende, le quotient étant le décideur", Digges, 1600).

Le mot *quoted* est lié au "quotient". Peletier (1549) explique sa définition : "*c'est savoir combien de fois un moindre nombre est contenu en un plus grand*". Ceci excluait donc les cas où le dividende était inférieur au diviseur, pour la raison qu'un calcul comme 3/4 ne pouvait être "fois" dans l'utilisation primitive du mot. Smith souligne dans son ouvrage (pp 128-129, 1958), que cet aspect était intentionnellement passé sous silence par beaucoup d'auteurs, et que l'idée première partait manifestement d'un diviseur entier et un quotient entier. Il nous semble que la qualification d'"oubli" paraît très simplificatrice.

Une seconde définition correspond à la méthode suivante : Il s'agit de trouver un nombre qui est contenu un certain nombre de fois dans le dividende avec l'unité contenue dans le diviseur. On trouve cette méthode dans Maximus Planudes (1340) et dans "*l'Arithmétique*" de Treviso (1478). Une amélioration de cette définition est basée sur le "ratio" (ou mesure d'une taille relative de deux classes exprimant une proportion : diviser ou partager-distribuer) ; il s'agit en ce cas de trouver un nombre qui possède, à l'unité, le même rapport que le dividende a avec le diviseur : c'est souvent le cas dans les livres du XVIe siècle.

Ce qui était naturel au Moyen Age quand la division était accomplie sur le boulier, c'était de se baser sur la soustraction pour fonder sa définition. On trouve le même sens dans la méthode "**Galley**".

De toutes les définitions élémentaires, la plus généralement approuvée décrit l'opération comme la recherche d'un nombre qui, multiplié par le diviseur, est égal au dividende. C'est peut-être la plus vieille définition encore existante et qui a encore l'approbation de beaucoup d'auteurs de manuels scolaires actuels.

D'après Smith (p.130, 1958), les définitions précédentes n'ont pas, en général distingué les deux notions de division illustrées par les cas 6ft ÷ 3ft = 2 et 6ft ÷ 2ft = 3, bien que la dernière définition inclue les deux cas. Rudolff (1526) semble avoir été le premier à faire cette distinction très clairement, et Stifel (1545) à l'avoir eu en second et Tartaglia par la suite. Divers écrivains des XVIe et XVIIe siècles l'ont aussi mentionnée.

3-2 - Terminologie de la division

Les premiers auteurs donnaient communément deux des nombres utilisés dans la division le "*numerus dividendus*" (nombre qui doit être divisé), et le "*numerus divisor*", aucun nom spécifique n'est donné au quotient, et aucune mention au reste. Ceux-ci sont, bien sûr, des termes non techniques, et ils apparaissent comme des expressions simples familières dans beaucoup de

travaux médiévaux. Cependant, progressivement, le mot numerus est abandonné, et les termes *dividendus et divisor* deviennent des noms techniques, comme ceux que l'on utilise à présent. Des mots comme "réponse" ou "résultat" étaient communément utilisés pour le quotient, et semblaient tout à fait acceptés à cette époque.

L'abandon du mot "*numerus*" et l'acceptation d'une abréviation rejoint un autre problème conceptuel, celui de la nominalisation, qui suppose que l'on regarde les nombres d'une autre manière que l'information sur laquelle (ou lesquelles) on va opérer. On va les regarder comme des objets.

Les termes ont subi différents changements. Le diviseur a fréquemment été appelé le "*parter*" ou le "*dividens*", mais ce dernier a été l'un des plus communément utilisés. Le dividende a généralement été appelé par son nom, bien qu'il y ait eu des termes équivalents à "*partend*", avec des variantes linguistiques. Le quotient a fréquemment été appelé le "produit" (Frisius, 1540), et autres auteurs latins), la "partie" (la "*parte*" dans l'ouvrage de Treviso), "l'*exiens*" (Scheubel, 1545), et "*the outcome*". Ce dernier terme utilisé par les auteurs anglais a été d'ailleurs le favori dans la plupart des langages européens.

Pour des raisons évidentes, le nom de reste a varié plus que les autres. Les écrivains latins médiévaux utilisaient "*numerus residuus*", "*residuus*", *et* "*residua*", et d'autres termes variés s'y rapportant, et d'autres auteurs par la suite employaient le même mot pour le reste, comme pour la fraction du quotient :

Par exemple, dans le cas de $7 \div 3 = 2$, on utilise en 1689, le terme de reste pour le chiffre 1, (car $7 = 2 \times 3 + 1/3$

Un des avantages consiste dans le fait que le résultat ne donne pas de reste, mais est exprimé sous la forme d'une fraction ; cela rend la division parfaitement inverse de la multiplication.

Le reste est une notion à laquelle les enfants se heurtent encore actuellement.

3-3 - Le processus de division

L'opération de division était considérée comme une des plus difficiles dans l'ancienne logistica au XVe siècle. Considérons avec humour ce que disait Pacioli (1494). Il remarquait que "*si un homme est capable de diviser, tout devient facile pour tous les autres calculs inclus au sein de l'opération*." Il console l'apprenant, toutefois, par un hommage aux bénéfices du travail difficile. Aussi élogieux était Gerbert (980) si les difficultés étaient vaincues, et il ne donnait pas moins de dix étapes dans la résolution, commençant par le calcul des unités avec les unités, traitées avec des soustractions implicites (voir chapitre 2-4). Jusqu'en 1424, Rollandus donnait seulement les cas les plus simples avec des nombres composés d'un seul chiffre, et presque deux siècles plus tard, Hylles

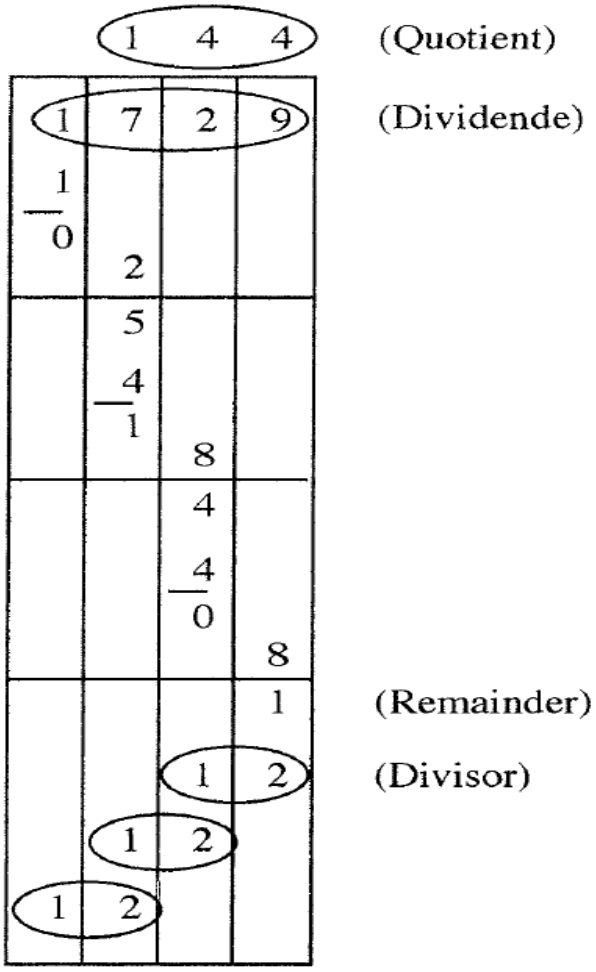
(1600) reconnaissait les difficultés : la "Diuision" est estimée comme une des opérations les plus préoccupantes d'arithmétique, et requiert un reste non demandé.

4 - PRINCIPES DES PRESENTATIONS ACTUELLES

4 -1 - La construction progressive de notre "longue" division

Smith pense qu'il est impossible de fixer une date exacte des origines de notre division actuelle, car son évolution s'est déroulée peu à peu. Nous trouvons dans différents travaux arabes et persiques des présentations comme celle présentée ci-dessous illustrant le cas :1729 ÷ 12 = 144 et avec 1 pour reste.

Cet exemple ressemble à notre modèle, mais présente néanmoins des points communs avec la méthode "**Galley**".



Ce document (Smith, p.140, 1958), s'analyse selon les étapes suivantes :

A) Après avoir divisé 17 par 12, on écrit le chiffre 1 au-dessus du 7. L'écriture du 12 est "décalée", comme dans la méthode "**Galley**".

B) La soustraction est effectuée, soit 17 - 12 = 5

C) Il faut lire ensuite le nombre 52 en "empruntant" le 5 au calcul précédent et le 2 au dividende ; et calculer 52 ÷ 12 = 4, que l'on inscrit au quotient. Le diviseur, 12, est réécrit tout en bas du tableau.

D) Le calcul donne 4 x 12 = 48, ôté de 52 reste 4.

E) On lit 49 ÷ 12 (le 9 est dans le dividende), ce qui donne 4. 4 x 12 = 48, ôté de 49, il reste 1.

Le chiffre 1 est le reste (*remainder*), le résultat est 144.

Au XIVe siècle, Planudes donnait ce qu'il appelait un système (ou mécanisme) arabe. C'est un modèle plus récent que celui présenté ci-dessous mais qui est bâti sur les mêmes principes :

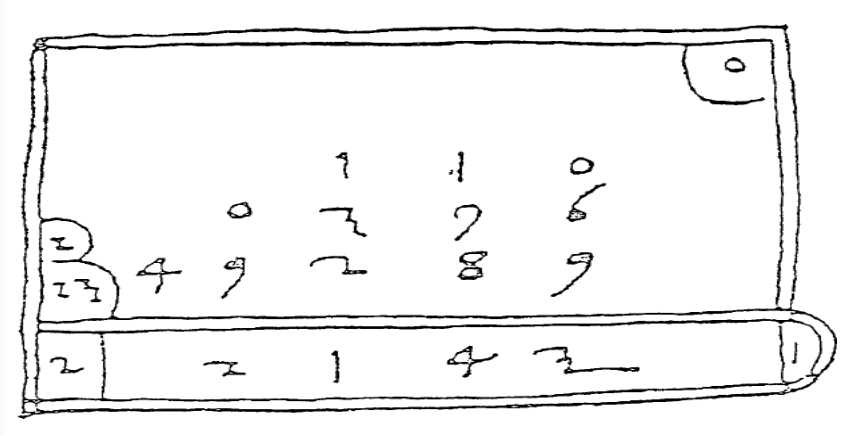
25) 625(25
4
22
10
125
100
25
25

soit 625 ÷ 25 = 25, le diviseur étant placé à gauche, et le quotient à droite.

La présentation en tableau n'existe plus. Les calculs intermédiaires sont sous la forme de soustractions posées, et la forme générale privilégie une lecture de gauche à droite. Cet algorithme ressemble beaucoup au nôtre.

Le XVe siècle apportait une méthode qui annonçait la forme actuelle, sous le nom de "**a danda**" (en donnant). Cette appellation provient du fait que lorsqu'un produit partiel est soustrait, la procédure consiste à "*abaisser*" un chiffre provenant du dividende, et de le "*donner*" au reste. Une belle illustration d'un manuscrit de 1460 est ici montrée ; le reste est écrit chaque fois avant le "donnant" décrit ci-dessus. Les noms de "*danda*" *ou* "*dande*" dans les régions de Toscane sont

encore utilisés pour désigner cette division. Cela a été appliqué cependant, avec des formes quelque peu différentes de celles montrées ici.



L'illustration en question provient d'une part d'un volume appelé un "*Arithmétique Commercial Ordinaire*" et provient de l'auteur Paolo Dagomai, né à Prato en 1281 et mort à Florence en 1374, qui fut un célèbre arithméticien. Comme les professeurs florentins produisaient au XIVe et XVe siècle des écrits et des formes de nombres qui sont les indicateurs de cette période et ne ressemblent pas à ceux du XIVe siècle, on explique ainsi que l'origine remonte peut-être au XVème siècle (Smith, "*Rara Arithmetica*", 1970, p.437). L'exemple de cette division est unique, et ne suit ni la "**Galley**" ni la méthode "**Danda**", comme dans l'illustration suivante de 49289 ÷ 23 = 2143 peut être explicité en plusieurs étapes comme suit :

Première étape :
23 (49289 soit 49289 ÷ 23

Deuxième étape :
03
23 (49289 soit 2 x 2 = 4 ôté de 4 reste 0
2 on inscrit un 0 au-dessus du 9
2 x 3 = 6 ôté de 9 reste 3
on inscrit le 3 au-dessus du 2
le quotient est écrit au-dessous

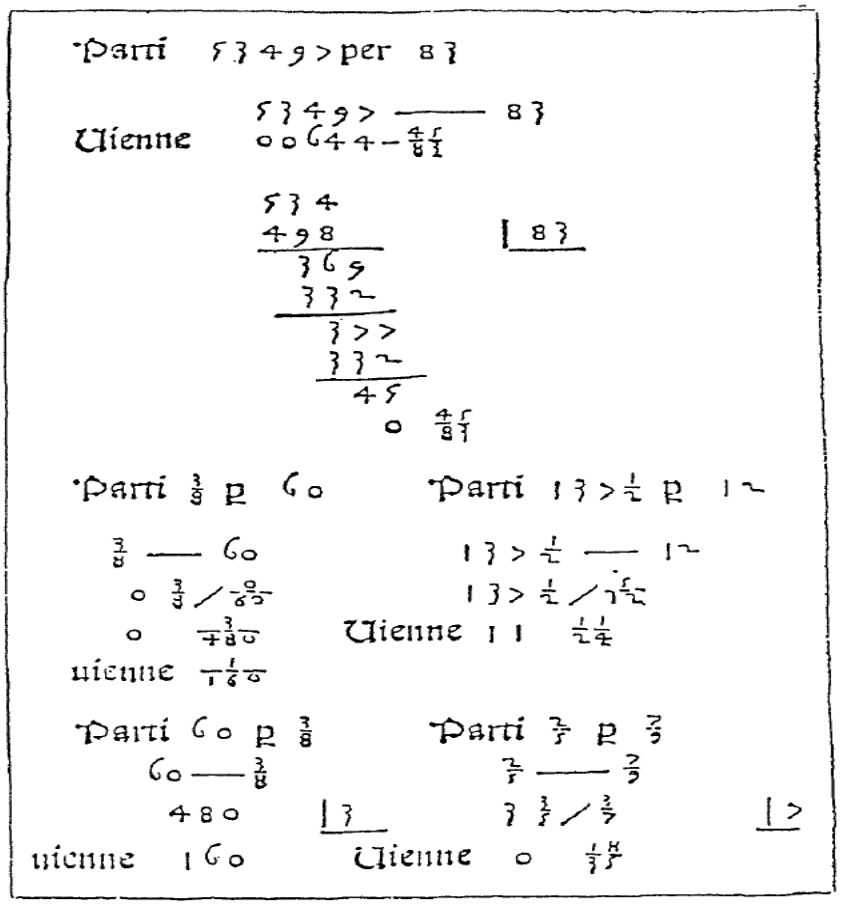
Troisième étape :
039 soit : 32 ÷ 23 = 1, 1 x 23 = 23 ôté de 32
23 (49289 reste 9 qui est inscrit au-dessus du 8
21 remarquons que 32 se lit verticalement

Quatrième étape :
0396 soit 98 ÷ 23 = 4, 4 x 23 = 92 ôté de 98
23 (49289 reste 6 qui est inscrit au-dessus du 9
2143 remarquons que 98 se lit verticalement
puis 69 ÷ 23 = 3, 3 x 23 = 69 ôté de 69 reste 0

La position des restes est remarquable. Ils s'inscrivent au-dessus du calcul. Le zéro situé dans le coin gauche indique le reste et les chiffres 2, 2, et 1 sont les retenues contenues dans les calculs intermédiaires. L'auteur considère ceci comme le plan de la "*danda*" (le précurseur de notre division actuelle), l'utilisation de ce nom venant immédiatement après. Un trait dépareillé apparaît dans le placement du second diviseur dans la division des fractions, à cette époque.

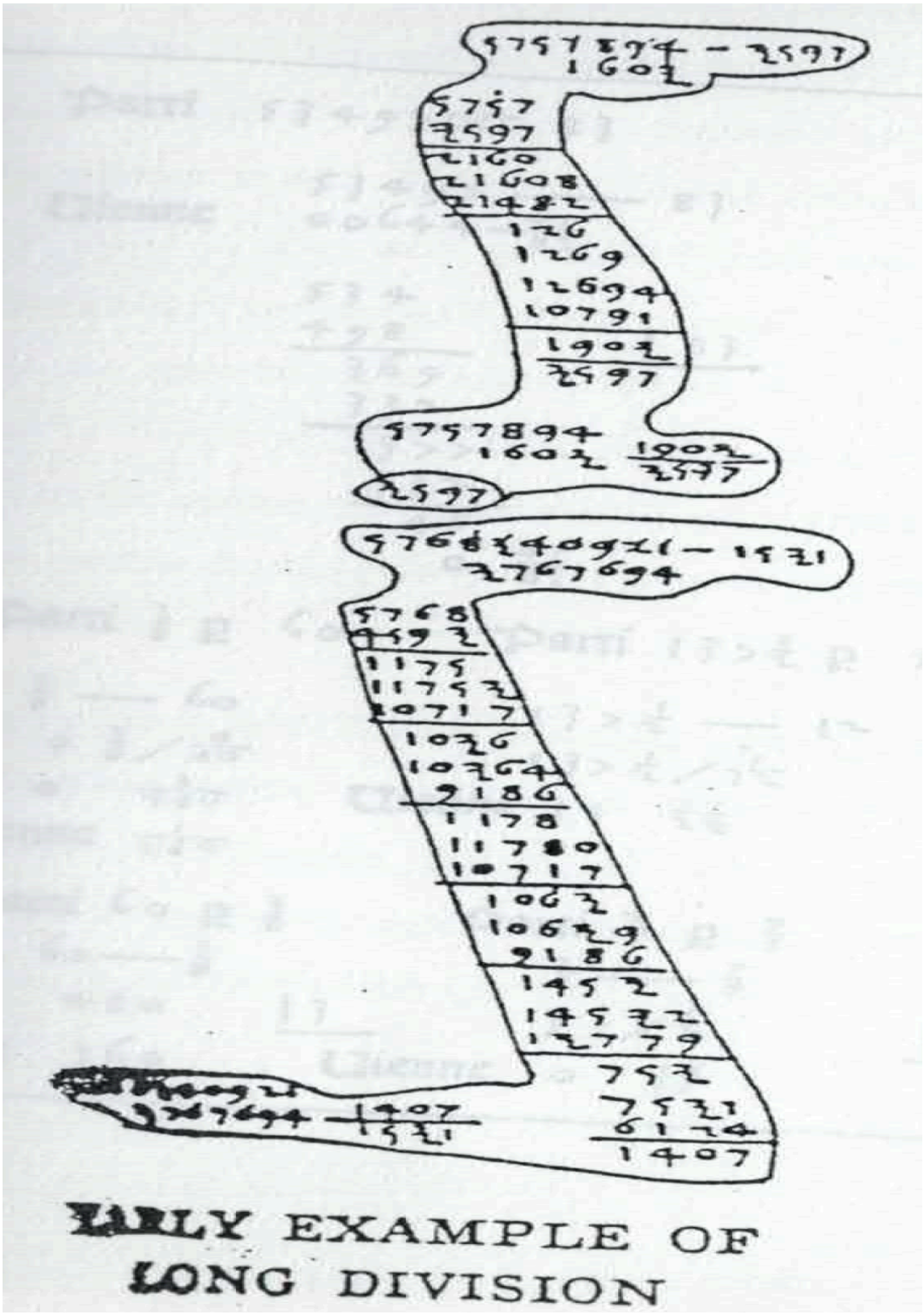
Le processus qui consiste à poser les soustractions sous le dividende et à « abaisser » les chiffres du dividende au fur et à mesure est illustré dans l'un des premiers livres imprimés (*Calandri'sc Arithmetics*, 1491). Le premier exemple de ce genre est le suivant : (5349 per 83 ou 5349 ÷ 83), (*Rara Arithmetica,* p. 47, 1970).

Il suit le principe de la division actuelle, mais le quotient n'était pas écrit sous le diviseur et le reste était donné sous la **forme fractionnaire.**



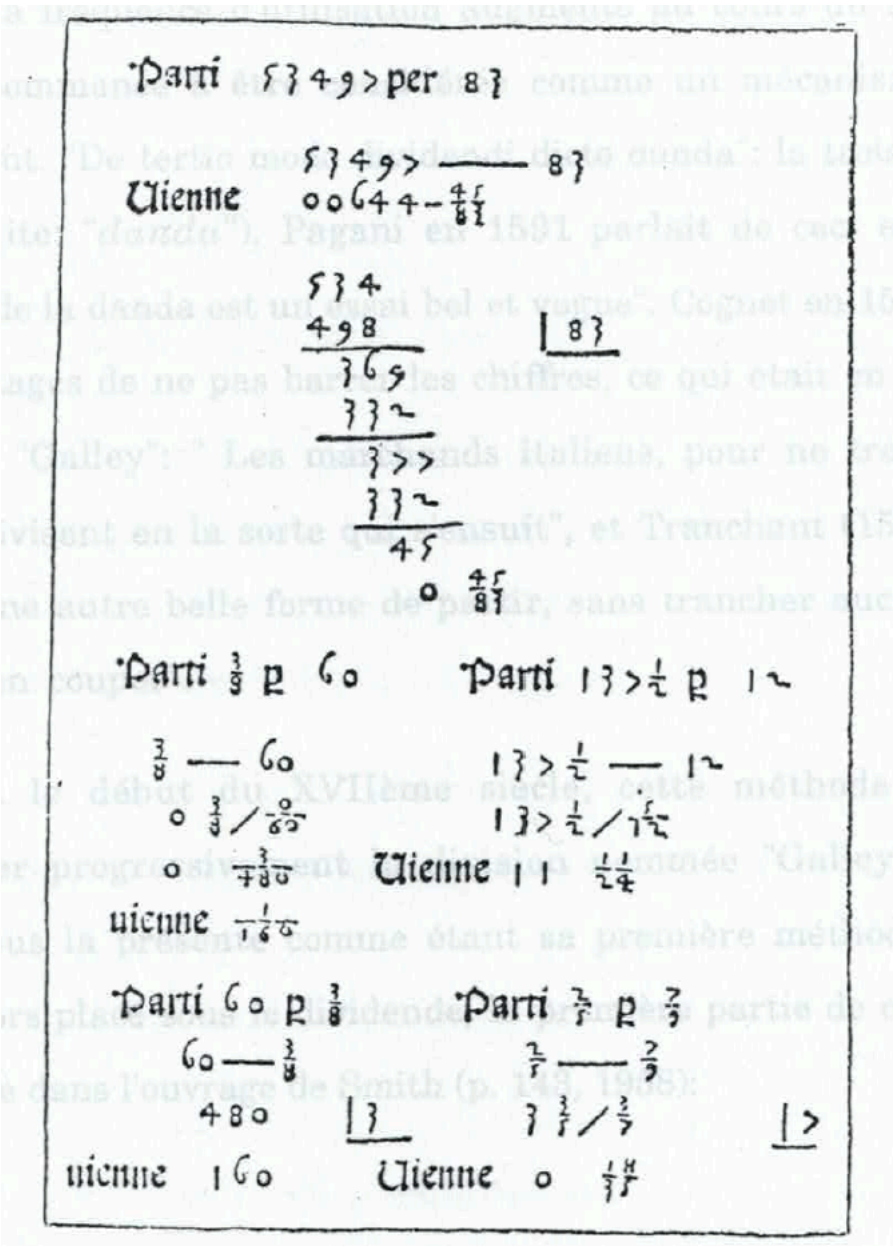
Un des premiers exemples de la méthode présentée ("*Early example of long division*") est issue d'un manuscrit italien de 1460 (*Bon compagni's Bulletino XIII,* 252). Cet exemple, illustré par le cas de 5757894 ÷ 2597, parle d'une solution analogue au "**danda**" ("*Questo sie' il partire a danda*", Smith, "Rara Arithmetica", 1970, p. 462). Nous choisissons de ne pas décrire les étapes

du calcul. Les chiffres du dividende partiel sont "abaissés" au fur et à mesure, et les soustractions intermédiaires sont posées ; **cette méthode révèle la structure actuelle de notre division.**



EARLY EXAMPLE OF
LONG DIVISION

Le premier livre imprimé ("*Calandri's Arithmetic*") donnait la méthode d'un travail de Calandri en 1491, et le premier exemple de ce genre est le suivant : (5349 per 83 ou 5349 ÷ 83), (*Rara Arithmetica,* p. 47, 1970).



Le processus consiste à poser les soustractions sous le dividende, et "d'abaisser" les chiffres du dividende au fur et à mesure. Il suit le principe de la division actuelle, mais le quotient n'était pas écrit sous le diviseur, et le reste était donné sous la forme fractionnaire.

Cette méthode fut identifiée comme étant la troisième méthode de Pacioli, sa fréquence d'utilisation augmente au cours du siècle suivant, où elle commence à être considérée comme un

mécanisme valable et intéressant. "*De tertio modo dividendi dicto danda":* la troisième façon de diviser dite: "*danda*"). Pagani en 1591 parlait de ceci en ces termes : "*Partire de la danda est un essai bel et vague*". Cognet en 1573, mentionne les avantages de ne pas barrer les chiffres, ce qui était en usage dans la méthode "**Galley**": " *Les marchands italiens, pour ne trancher aucune figure, divisent en la sorte qui s'ensuit*", et Tranchant (1566) remarque: "*Il y a une autre belle forme de partir, sans trancher aucune figure" ou "sans rien couper*".

Dès le début du XVIIe siècle, cette méthode commence à remplacer progressivement la division nommée "**Galley**". Cataldi, en 1602, nous la présente comme étant sa première méthode, le quotient étant alors placé sous le dividende, la première partie de ce travail étant présentée dans l'ouvrage de Smith (p. 143, 1958):

```
37) 46201
      1248 ---------- 25 (reste)
    46
    37
     92
     74
   .....
```

Il plaçait le quotient sur la droite, en justifiant que c'était l'usage courant à Milan. Dans la méthode "**Galley**", le quotient se situait à droite du dividende.

A la fin du XVIIe siècle, la forme « moderne » de la division était bien établie, la méthode "**Galley**" étant considérée alors tout au plus, comme une curiosité.

Il y a eu plusieurs variantes de la méthode "**danda**", mais notamment l'une d'entre elles omet les produits partiels comme suit :

```
          625
25)      |15625
            62
            125
              0
```

Cataldi (1602) l'appelait "**a danda**" abrégée. Cela a été plus ou moins en vogue pendant trois siècles, mais, d'après Smith, cela exige beaucoup trop d'efforts intellectuels pour devenir une pratique courante. Cette méthode occasionne des débats par des professeurs américains à Greenwood en 1729, qui discutaient des différentes méthodes. On peut limiter principalement ces

diverses méthodes italiennes à deux seulement : celle de la "**danda**" et sa forme contractée.

Une des plus intéressantes méthodes du XVIe siècle était celle d'Apianus (1527), qui suggérait la combinaison de fractions décimales. Pour diviser 11667 par 48, Apianus écrivait au départ les parts du quotient, considérant 48 comme une unité, ce qui donnait substantiellement la présentation suivante :

	48	correspondant à 1
$\frac{1}{2}$	de 48 = 24	correspondant à 0,5
$\frac{1}{4}$	de 48 = 12	correspondant à 0,25
$\frac{1}{8}$	de 48 = 6	correspondant à 0,125
$\frac{1}{16}$	de 48 = 3	correspondant à 0,0625

Tout ce qui était une méthode pour résoudre une division était accompagnée d'une table des multiples du diviseur. Ces tables sont trouvées dans plusieurs travaux incluant ceux de Recorde (1542), Fine (1530), Ramus (1569), Hylles (1592), et Greenwood (1729), (voir les deux illustrations ci-dessous).

Nicolas Chuquet (né en 1445, et mort vers 1500) utilisait le mot "partiteur" pour nommer le diviseur, désigné aussi par les termes "*parteur*" *ou* "*partisseur*"*:* c'est bien la notion de partage qui préside ainsi au sens donné à la division. En outre, on sait que dans l'Encyclopédie de d'Alembert (1751-1754), celui-ci donne avec précision un autre sens que celui de partage, le sens de rapport, qui justifie ainsi d'une façon différente la définition du quotient (combien de fois).

Table de Multiplication.

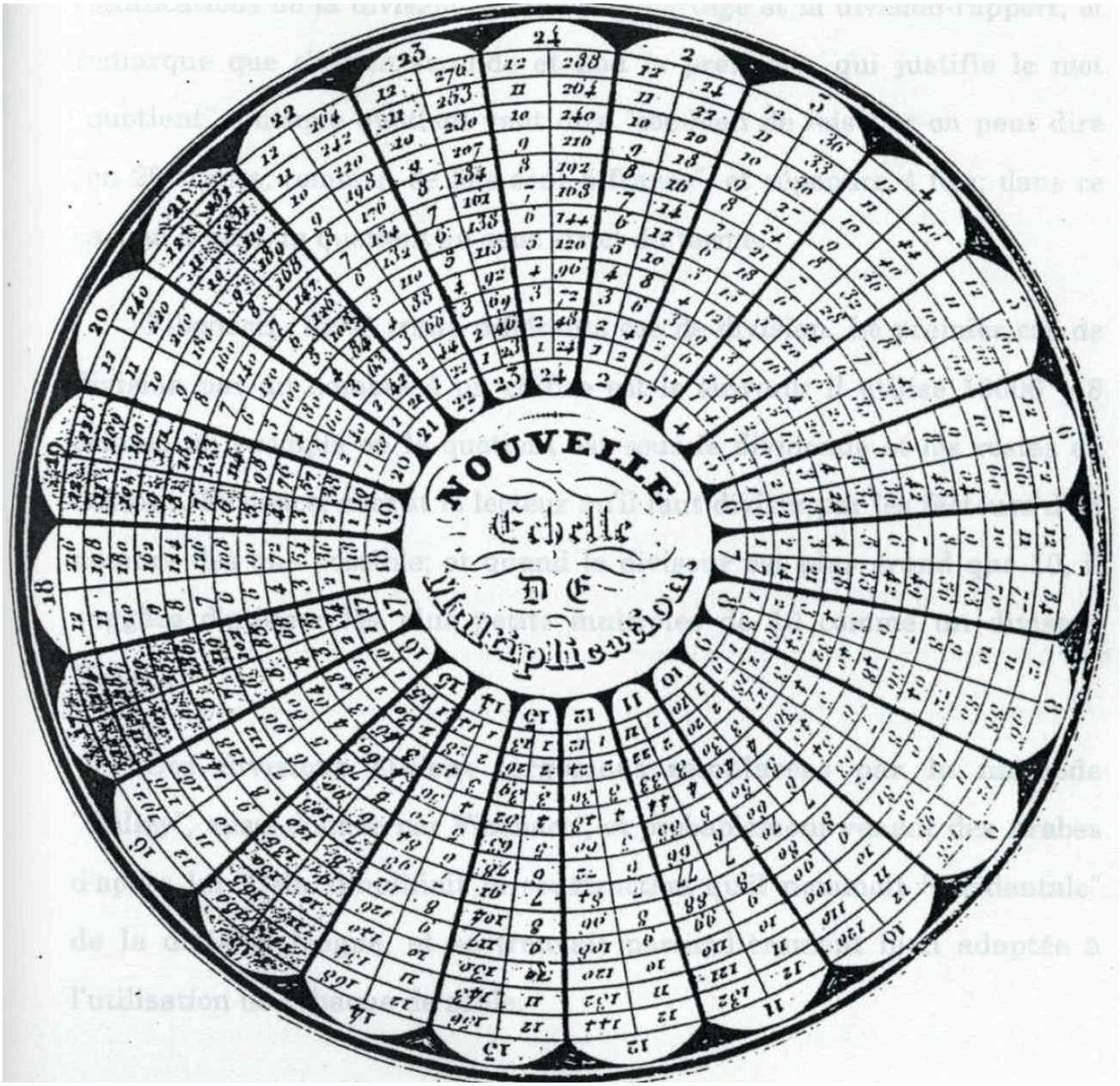
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Uſage de la Table.

Cette Table ſert pour trouver le produit de deux nombres multipliés l'un par l'autre.

Comme, par exemple, ſi on veut trouver le produit de 7 multiplié par 9, il faut chercher 7 dans la premiere colonne qui commence par 1, puis multipliant cé 7 par le 9 de la premiere ligne, on dira 7 fois 9 font 63, que l'on trouvera à la colonne vis-à-vis du 7, & ainſi des autres.

TABLE DE MULTIPLICATION DU XVIIIe SIECLE



AUTRE EXEMPLE D'UNE TABLE DE MULTIPLICATION DU XVIIIe SIECLE

D'Alembert donne avec une grande clarté les traditionnelles "**deux significations de la division**", la division-partage et la division-rapport, et remarque que c'est la seconde et non la première, qui justifie le mot "quotient", puisque quotient veut dire "combien de fois" ; or on peut dire "en 20 francs, combien de fois sont 5 francs", et répondre 4 fois : dans ce cas, on a bien un

quotient au sens strict du terme.

Fibonacci (1202) traite différents cas de division. Le premier cas de division par un nombre à un chiffre est le suivant : il utilise 10000 ÷ 8 comme un exemple où le quotient est sous le dividende et les restes en dessous. Fibonacci avertit le lecteur qu'il faut diviser par les facteurs d'un nombre dès que possible ; et quand le diviseur est plus grand que 10, il suggère d'utiliser les plus petits multiples de 10 comme un diviseur "trial".

Ces divisions étaient largement remplacées par la méthode "**Galley**", aussi donnée par Fibonacci, et probablement venant des Arabes d'après lui. Cela simplifiait la soustraction qu'il nommait "incidentale" de la division longue, et se trouvait particulièrement bien adaptée à l'utilisation de l'abaque de sable.

4-2 - De l'origine du système sexagésimal à celui des décimaux

L'installation des décimaux dans la pratique tant mathématique que courante a été une longue et pénible affaire, ce qui, aujourd'hui, nous paraît "presque" impensable et peut amener à se poser au moins deux questions : comment faisait-on sans eux, et pourquoi, une fois qu'ils ont été trouvés, et alors que leur maniement est simple, ont-ils eu tant de mal à s'imposer ?

L'écriture des entiers en base 10, c'est-à-dire de l'arithmétique indienne en chiffres indo-arabes, n'avait pas encore gagné la partie en Occident à la fin du XVe siècle, où l'on écrivait encore couramment en chiffres romains et où on calculait avec l'abaque, qui est une sorte de boulier, ou des jetons. Vers 1470, en effet, Nicolas Chuquet explique encore les avantages des 10 figures, les dix chiffres, dont il dit que "*la dixième ne possède pas de valeur ou ne signifie pas une valeur, et dès lors elle est appelée zéro ou rien ou figure d'aucune valeur*".

La grande merveille du système décimal, ce sont donc ces dix figures, qui permettent de se représenter les nombres les plus extraordinaires et de faire ses comptes avec une étonnante facilité. Il est bien plus délicat d'effectuer par exemple, le produit de 43 par 78 en chiffres romains, avec un abaque, ou avec des jetons.

Les pratiques quantitatives sont si profondément enracinées qu'elles jouent le rôle "d'une langue maternelle de la quantité" et il est difficile de faire penser les mêmes pratiques dans une langue nouvelle ; c'est ainsi que l'histoire reproduit à maintes reprises le processus de l'adoption difficile d'un système plus facile, système de numération ou de mesures, infiniment plus commode que le précédent mais nouveau, donc étranger.

Une fois les entiers écrits, en système décimal et la diffusion de cette arithmétique indienne grandement aidée par la découverte de l'imprimerie, il restait les fractions. Les besoins courants mettaient en jeu des fractions, puisque ces unités étaient construites de manière à avoir de

nombreux diviseurs. Par diviseur, on utilisait des nombres qui étaient des fractions d'entiers.

Mais si les fractions étaient commodes à nommer, les calculs, eux, supposaient de constantes et de pénibles conversions ; calculs d'autant plus longs et compliqués qu'on avait à faire à des sujets plus difficiles ; les scientifiques de l'époque, astronomes ou mathématiciens, eux, utilisaient tout à la fois les fractions ordinaires, les quantièmes égyptiens, les fractions sexagésimales, babyloniennes.

Alors que les décimaux apparaissaient organisés en système dès le Xème siècle chez les auteurs arabes, il faut attendre près de six siècles pour que François Viète (1540-1603) s'en fasse l'ardent défenseur, les utilise et recommande les fractions sexagésimales.

Mais c'est Simon Stevin (1548-1620), caissier, comptable et professeur de mathématiques, qui parviendra à convaincre ses contemporains du bénéfice qu'il y a à rompre systématiquement les unités de 10, en remplaçant les calculs, conversions et réductions aux mêmes dénominateurs par des calculs sur les entiers ordinaires. En 1585 paraît sa fameuse **Disme** qui connaît un succès considérable (*disme* veut dire "dixième") : il explique comment "*expédier facilement sans nombres rompus tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains*".

Une fois les décimaux en place pour écrire les nombres, il restait la division du cercle, le système des poids et mesures, les monnaies etc... Stevin, cohérent jusqu'au bout, proposait évidemment de tout décimaliser. Ce fut encore l'affaire de quelques siècles, avant que la grande merveille du système métrique, fondée sur celle du système décimal (qui lui était antérieure), finisse par s'imposer.

Une fois le système métrique imposé et reconnu comme devant être universellement utilisé, des îlots (ou des îles) de résistance se sont encore maintenus quelques siècles : les anglo-saxons, qui ont des pratiques quantitatives qui nous paraissent d'une difficulté effroyable, ont encore du mal à adopter la facilité des mètres, décimètres, centimètres...

Un texte particulièrement célèbre de Laplace (1749-1827) est la leçon qu'il donna à l'école normale le 11 floréal de l'an III (le second mois du printemps de l'année 1796) exaltant les vertus du Système Métrique Décimal qui venait d'être définitivement décrété par la Convention Nationale : "*Incomparablement plus simple que l'ancien, dans ses divisions et dans sa nomenclature, il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance*".

Or le système décimal, enseigné aux enfants, et donc à toute la population, produit par sa facilité même des effets paradoxaux. C'est qu'en effet plus les calculs changent, plus il est difficile d'en comprendre le pourquoi : pourquoi déplace-t-on une virgule, pourquoi ajoute-t-on ou enlève-t-on des zéros ? Ces pratiques ont depuis toujours semblé difficiles aux écoliers. Elles le sont plus encore depuis que la calculatrice, prise comme garante de vérité, les fait toute seule.

Simon Stevin, pour convaincre de l'utilité de sa Disme, explique dans le langage de l'époque, à maintes reprises, comment "*par tel moyen sera gaigné le précieux temps*" et "*sera ôté labeur, noise erreur, dommage et autres accidents communément aloincts à ceux y*".

Nos dix doigts rendent naturel le comptage par dix, donc relativement naturelle la multiplication par dix et la numération décimale des entiers. Mais pour la division, c'est autre chose : ils ne servent pas à nous penser pourvus d'extrémités qui sont les dixièmes d'une entité inexistante. Ainsi, pour diviser, partager, quand on est trois, ou quatre, ou six, et qu'on se trouve dans la nécessité de rompre des unités, peut-être faut-il rendre explicite la démarche artificielle qui consiste à les diviser en dix, démarche rendue naturelle par l'utilisation d'unités aujourd'hui faites sur mesure pour aller avec, et par l'habitude. Ce n'est pas par hasard que les fractions tout court sont pratiquement aussi anciennes que les entiers.

4-3 - Abacistes contre algoristes : le calcul et ses variations

Grâce aux nombreux échanges que les guerres impliquèrent par la force des choses avec la culture musulmane, certains clercs de la suite des croisés apprirent en effet le calcul à la manière du Samanide Al-Kwarizmi, en traçant des chiffres sur le sable sans se servir des colonnes de l'abaque à poussière. Les premiers "**algoristes**" européens venaient donc d'apparaître aux portes mêmes de Jérusalem. La querelle des "**Abacistes**" (farouches défenseurs des chiffres romains et du calcul sur l'abaque à jetons) et des "Algoristes" (tenants du calcul chiffré d'origine indienne) a duré plusieurs siècles. Mais contrairement aux "abacistes", qui préconisaient avant tout le calcul sur l'abaque à jetons, les algoristes adoptèrent le zéro pour signifier l'unité manquante. Cette fois, les chiffres arabes allaient pénétrer en Occident, en même temps que le zéro et les techniques du calcul écrit d'origine indienne.

Les Croisés assiégeant Jérusalem ou savants séjournant à Tolède, signaient donc déjà la condamnation à mort de l'abacisme à plus ou moins brève échéance. Ce mouvement s'accentua au début du XIIIe siècle, grâce à l'influence déterminante d'un grand mathématicien italien Léonard de Pise, mieux connu sous le nom de Fibonacci. Celui-ci visita l'Afrique musulmane et se rendit au Proche-Orient. Il s'y fit expliquer à fond le système numérique des maîtres arabes, les règles du calcul algébrique et les principes fondamentaux de la géométrie. Il rédigea en 1202 un traité qui devint en peu de temps le bréviaire de tous les tenants de "l'*algorisme*", et qui contribua aussi beaucoup à la diffusion et au développement de l'algèbre.

Ce traité explique en effet toutes les règles du calcul chiffré sur le sable, auquel l'auteur donna le nom paradoxal de *Liber Abaci* ("Traité de l'Abaque"), alors que celui-ci introduisait en fait les premiers algorithmes ne reposant pas sur les abaques.

Sans doute avait-il voulu éviter de la sorte les foudres des **abacistes**, ces derniers détenant alors le monopole du domaine numérique. Les calculateurs professionnels de l'époque, ceux qui

pratiquaient les opérations sur l'abaque, soucieux de préserver leur monopole, ne voulaient pas entendre parler de ces méthodes révolutionnaires, peut-être afin de préserver leur compétence exclusive sur les opérations arithmétiques, peut-être aussi par incompréhension.

Mais une autre raison du refus de la numération indo-arabe fut d'ordre idéologique. Certaines autorités ecclésiastiques firent courir le bruit que, pour être si facile, si ingénieux, le calcul à la manière arabe devait sûrement avoir quelque chose de magique, voire de démoniaque : il ne pouvait provenir que de Satan lui-même !

On enseigna l'usage de l'abaque jusqu'au XVIIIe siècle, et les gens continuèrent, à vérifier par les abaques tous les calculs effectués à la plume, pratique qui l'avait pourtant emporté depuis longtemps auprès des scientifiques, tant sa supériorité était éclatante. Mais les commerçants, les banquiers, les financiers et les fonctionnaires, en fin de compte plus conservateurs, eurent beaucoup de mal à se séparer de l'abaque. Celle-ci joua en quelque sorte le rôle de preuve dans les algorithmes écrits, ou de calculette.

C'est sous la Révolution française que l'usage de l'abaque dans les écoles et les administrations fut abandonné.

4-4 - Les premières machines à calculer

La première machine à calculer de tous les temps, est certainement la main, qui représente la première auxiliaire de compte et de calcul. Elle a servi à calculer mais aussi à effectuer diverses opérations arithmétiques. Par exemple, une tradition que l'on retrouve en France, comme en Inde, en Syrie, en Serbie, en Afrique du Nord.

Pour multiplier 7 par 8 par exemple, l'homme repliait sur une main autant de doigts qu'il y a d'unités supplémentaires dans 8 par rapport à 5, soit 8 - 5 = 3 doigts, et il maintenait les deux autres doigts en position étendue. Il repliait ensuite sur l'autre main autant de doigts qu'il y a d'unités supplémentaires dans 7 par rapport à 5, soit 7 - 5 = 2 doigts, et il maintenait les trois autres en position étendue. Il obtenait alors le résultat du produit cherché en multipliant d'abord par dix mentalement, le nombre des doigts repliés sur les deux mains, soit :

(3 + 2) x 10 = 50 ; et ajoutait ensuite ce résultat partiel au produit des doigts levés de la première main par les doigts levés de l'autre ; c'est-à-dire à :

2 x 3 = 6. De la sorte, il aboutissait donc bien à 8 x 7 = 56, ou bien :

8 x 7 = (3 + 2) x 10 + (2 x 3) = 56.

Ce procédé concret, que les Anciens ont certainement trouvé de façon empirique, est infaillible : il permet d'effectuer rapidement les multiplications de tous les nombres compris entre

5 et 10. En voici la justification mathématique :

Soit x et y deux nombres compris entre 5 et 10 qu'il s'agit de multiplier entre eux; replions sur une main autant de doigts qu'il y a d'unités supplémentaires dans x par rapport à 5, soit (x - 5) doigts, et sur l'autre autant de doigts qu'il y a d'unités supplémentaires dans y par rapport à 5, soit (y - 5) doigts. Le nombre de doigts étendus sur la première main est égal à : A = 5- (x - 5), tandis que celui des doigts étendus sur l'autre main est de : B = 5 - (y - 5).

Quant au nombre total des doigts repliés sur les deux mains, il est égal à :

R = (x - 5) + (y - 5).

La règle concernant cette multiplication digitale se justifie donc du fait que l'expression :

(10 x R) + (A x B)

(produit par 10 du nombre total des doigts repliés, augmenté du produit des doigts étendus) correspond à :

10 [(x - 5) = (y - 5)] + [5 - (x - 5)] X [5 - (y - 5)] = xy, c'est-à-dire le produit cherché.

On conçoit dès lors comment, durant de nombreux siècles, des hommes qui ne disposaient pas de notre calcul moderne au moyen des chiffres arabes ont pu, grâce à leur mémoire et aux multiples ressources des doigts de la main, déployer toute leur imagination pour se tirer d'embarras... Mais la main, premier support concret du compte et du calcul, ne constitue qu'un mode fugitif d'enregistrement du concept numérique. Elle répond certes aux besoins de la représentation visuelle des nombres, mais sûrement pas à la nécessité de les mémoriser.

Une autre méthode concrète, universellement attestée elle aussi, a joué un rôle encore plus important dans l'histoire de l'arithmétique et de la comptabilité : c'est celle des "tas de cailloux" (ou des groupements de bâtonnets, de coquillages, de fruits durs, etc.). Cette méthode n'exige aucune mémoire ni connaissance abstraite des nombres, et ne fait intervenir que le principe de la correspondance unité par unité. Son rôle est d'autant plus important dans l'histoire de l'arithmétique, que ce sont les cailloux qui ont véritablement permis à l'homme de s'initier à l'art du calcul (le mot *calculus* veut dire petit "caillou"). Les cailloux sont en particulier à l'origine des abaques et des bouliers-compteurs, ces instruments que l'homme a inventés le jour où il cherchait un moyen pratique d'effectuer des calculs de plus en plus compliqués, et dont il a si souvent usé à l'époque où il ne disposait pas encore du calcul écrit au moyen des chiffres arabes.

"Certains guerriers de Madagascar, il n'y a pas si longtemps encore, avaient une coutume bien pratique pour évaluer leurs troupes. Ils faisaient défiler les soldats en "file indienne" par un passage très étroit. A chaque fois que l'un d'entre eux en sortait, on posait un caillou dans une

tranchée creusée à même le sol. Au passage du dixième soldat, on remplaçait les dix cailloux de cette tranchée par un seul d'entre eux que l'on déposait dans une deuxième rangée. Quand celle-ci contenait à son tour dix pierrettes, cent soldats ayant alors été comptés, on remplaçait celles-ci par un autre caillou que l'on posait dans une troisième tranchée, réservée cette fois aux centaines. Et ainsi de suite jusqu'au dernier guerrier. Au dénombrement de 456 soldats par exemple, six cailloux se trouvaient donc placés à la première rangée, cinq autres à la deuxième et quatre autres enfin à la troisième" (Ifrah, p.115, 1988).

Ces Malgaches avaient inventé l'usage de l'abaque. D'autres peuples eurent l'idée de remplacer ces colonnes par des tiges de métal ou de bois disposés en parallèle, et chaque caillou par une boule percée pouvant coulisser librement le long de chacune de ces tiges, et c'est ainsi qu'ils inventèrent le boulier-compteur...

Chez les peuples occidentaux, les abaques les plus courants consistèrent en des tables ou des planchettes, sur lesquelles des divisions en plusieurs lignes ou colonnes parallèles, tracées d'avance, séparaient les différents ordres de numération. Pour représenter des nombres et pour effectuer des opérations, on y plaçait des cailloux ou des jetons ayant chacun valeur d'unité simple. Ces jetons étaient des pièces auxquelles les Grecs donnaient le nom de *psephoi* et les Romains celui de *calculi*.

Dans l'abaque des Romains de l'Antiquité, chacune de ces colonnes ou rangées symbolisaient généralement l'une des puissances de dix. En partant de la droite vers la gauche, la première colonne était associée aux unités, la suivante aux dizaines, la troisième aux centaines, la quatrième aux milliers, et ainsi de suite. Pour y faire figurer un nombre donné, il suffisait alors de placer dans les diverses colonnes concernées autant de jetons identiques qu'il y avait d'unités dans chaque ordre envisagé : cinq jetons dans la quatrième, six dans la troisième, neuf dans la deuxième et trois dans la première pour le nombre 5693 par exemple. Les soustractions, par exemple, s'effectuaient alors selon un procédé de réductions de jetons dans les diverses colonnes concernées. Quant à la division, elle se réduisait à une succession de partages en parties égales.

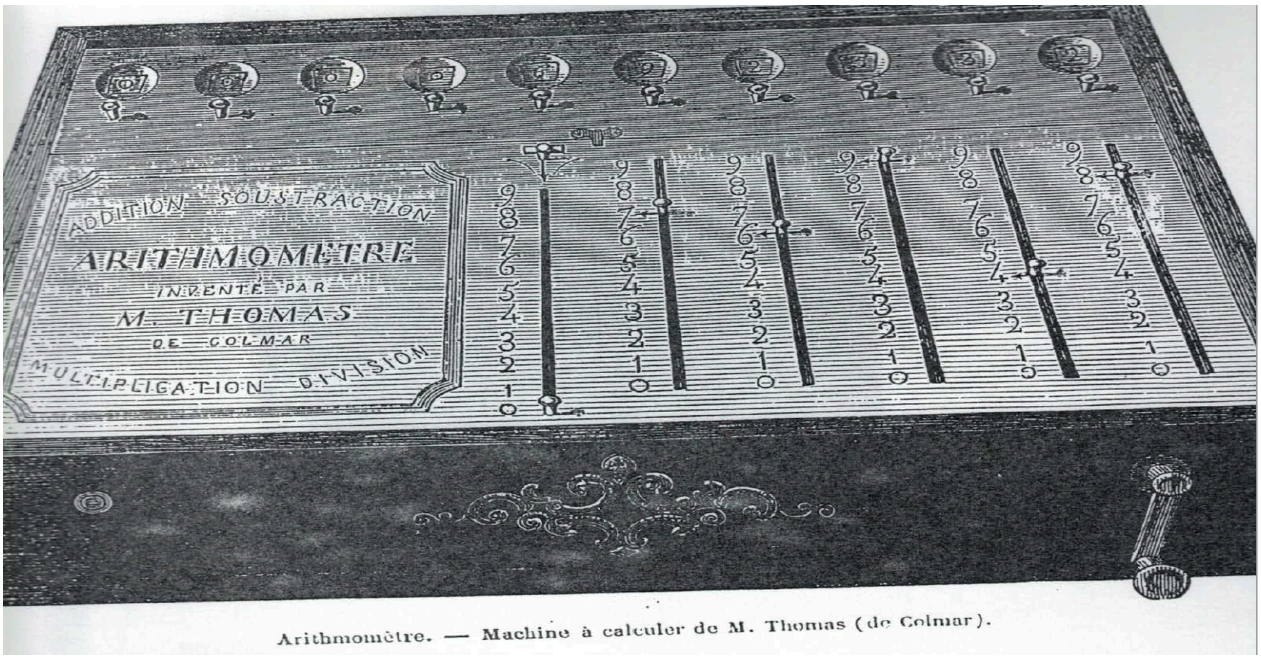
La pratique du calcul sur l'abaque était donc très lente et supposait de la part des arithméticiens un apprentissage préliminaire long et laborieux.

En Chine populaire, le maniement du boulier-compteur est vieux de plusieurs siècles, et est d'ailleurs encore en usage actuellement. Parmi tous les dispositifs de calcul figuré employés par les peuples au cours des âges, le boulier est à peu près le seul à offrir l'avantage d'une pratique relativement simple et rapide pour toutes les opérations arithmétiques. Cet auxiliaire du calcul est très utile pour effectuer de simples additions ou soustractions de nombres composés de plusieurs chiffres, ou encore pour résoudre des problèmes plus compliqués portant sur des multiplications, des divisions, voire sur des extractions de racines carrées ou cubiques. Sans nous étendre sur la description du maniement de l'instrument, relevons néanmoins que l'usage exige de connaître par

coeur les tables d'addition et de multiplication des nombres de 1 à 9. Cela nécessite aussi un apprentissage assez long, un entraînement assidu, un "doigté" très précis, ainsi qu'une impeccable stabilité du support. La moindre erreur oblige à reprendre la totalité des calculs, puisque les résultats intermédiaires disparaissent au fur et à mesure du déroulement des opérations (produits partiels dans les multiplications, restes en cours dans les divisions). Cela n'enlève rien, cependant, à l'ingéniosité de l'instrument.

Actuellement, les Japonais, qui se sont considérablement "informatisés" et qui représentent les plus sérieux concurrents des marchés Américains en matière de construction de calculettes, considèrent toujours le boulier comme l'instrument principal du calcul courant. Le même phénomène est constaté en Russie.

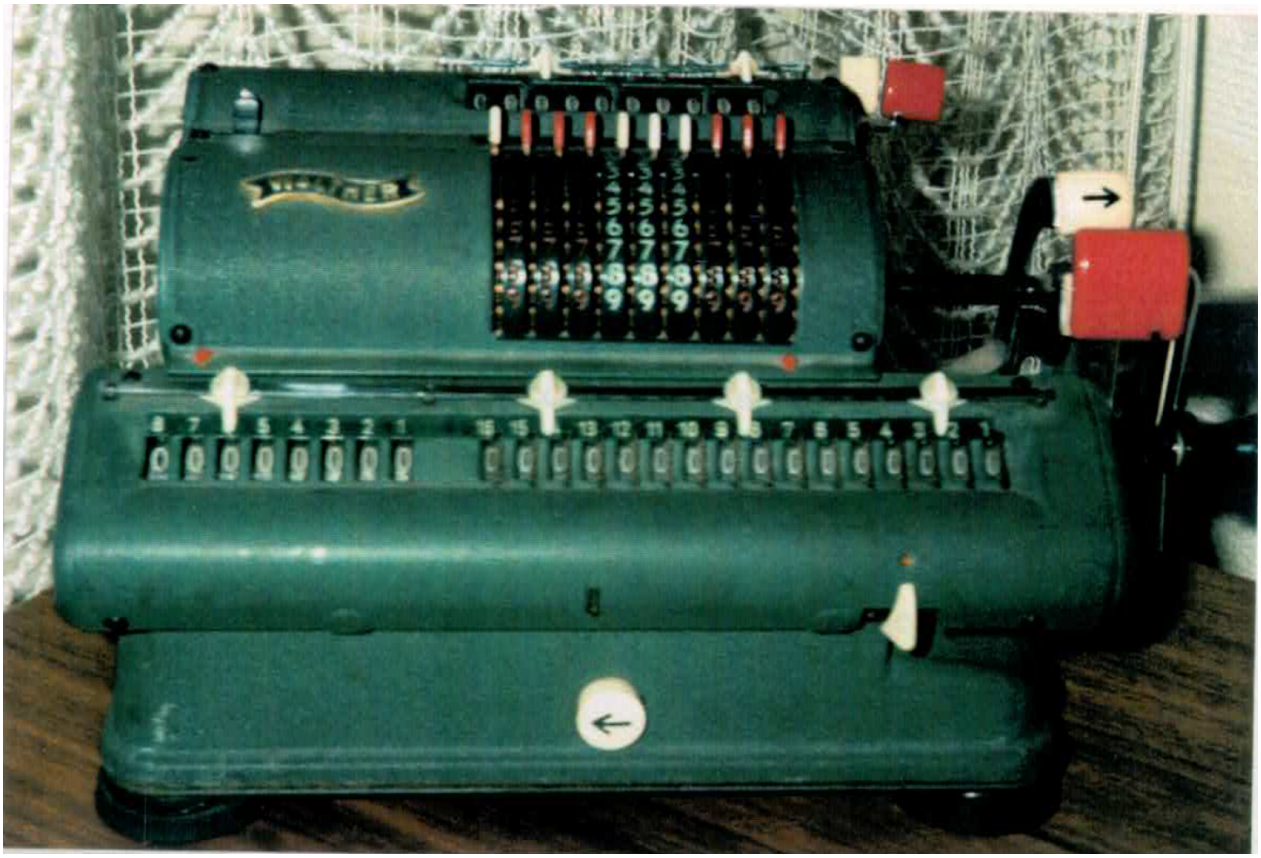
La calculette actuelle a connu différents ancêtres (voir illustration d'une machine à calculer du XVIIIe siècle nommée "Arithmomètre", (illustration ci-jointe). Citons par exemple, une machine à calcul actuelle (illustration ci-jointe). Pour exécuter une division, le principe est de soustraire du dividende le diviseur, de façon systématique, jusqu'à obtenir un nombre (le reste) inférieur à celui-ci. De fait, l'usage de cet instrument est limité dès lors que les nombres à diviser sont "grands".



Arithmomètre. — Machine à calculer de M. Thomas (de Colmar).

Machine à calculer : "Arithmomètre" (Début du XXe siècle)

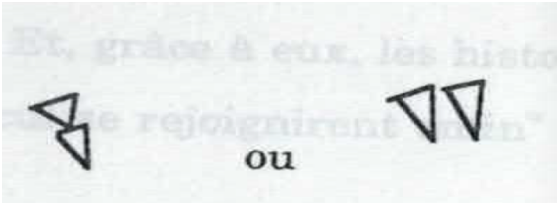
Source : INRP, Paris



Machine à calculer contemporaine (XXe siècle)

4-5 - Origine et évolution du zéro

Pendant plus de quinze siècles, les mathématiciens et les astronomes babyloniens ont ignoré le zéro. Dans un premier stade, ils laissaient un vide au lieu d'écrire un symbole, mais cet espace fut souvent oublié par les scribes. Au IIIe siècle avant J. C., un signe fut introduit pour signifier l'absence des unités sexagésimales d'un certain rang :



Et c'est ainsi que naquit le zéro babylonien, le plus vieux de l'histoire. Toutefois, ce zéro n'était pas alors conçu comme un nombre nul pouvant être utilisé dans la numération et dans le calcul. 2000 ans après les mathématiciens de Babylone, et sans aucun doute indépendamment de leur influence, les savants chinois redécouvrirent l'absence de signe pour le zéro.

C'est à partir du VIIIe siècle environ après J.C., sous l'influence des mathématiciens et des astronomes d'origine indienne que les savants chinois ont disposé du zéro.

Un des rares manuscrits mayas, le *Codex de Dresdes*, un traité d'astronomie et de divination qui avait été copié au IXe siècle de notre ère, sur un original rédigé trois ou quatre siècles auparavant. Il révèle l'existence chez les prêtres mayas d'un système de base 20 muni d'un zéro, et où la valeur des chiffres est déterminée par leur position dans l'écriture des nombres. Les Mayas avaient donc inventé le zéro, mais celui-ci n'avait pas véritablement de portée dans les opérations.

Au début du VIe siècle après J.C., en Inde, le zéro fut symbolisé par un point (le mot bindu "le point", étant l'un des mots symboles synonymes de "vide"), ou encore, pour des raisons inconnues, par un petit rond. C'est ainsi que le chiffre zéro actuel vit le jour.

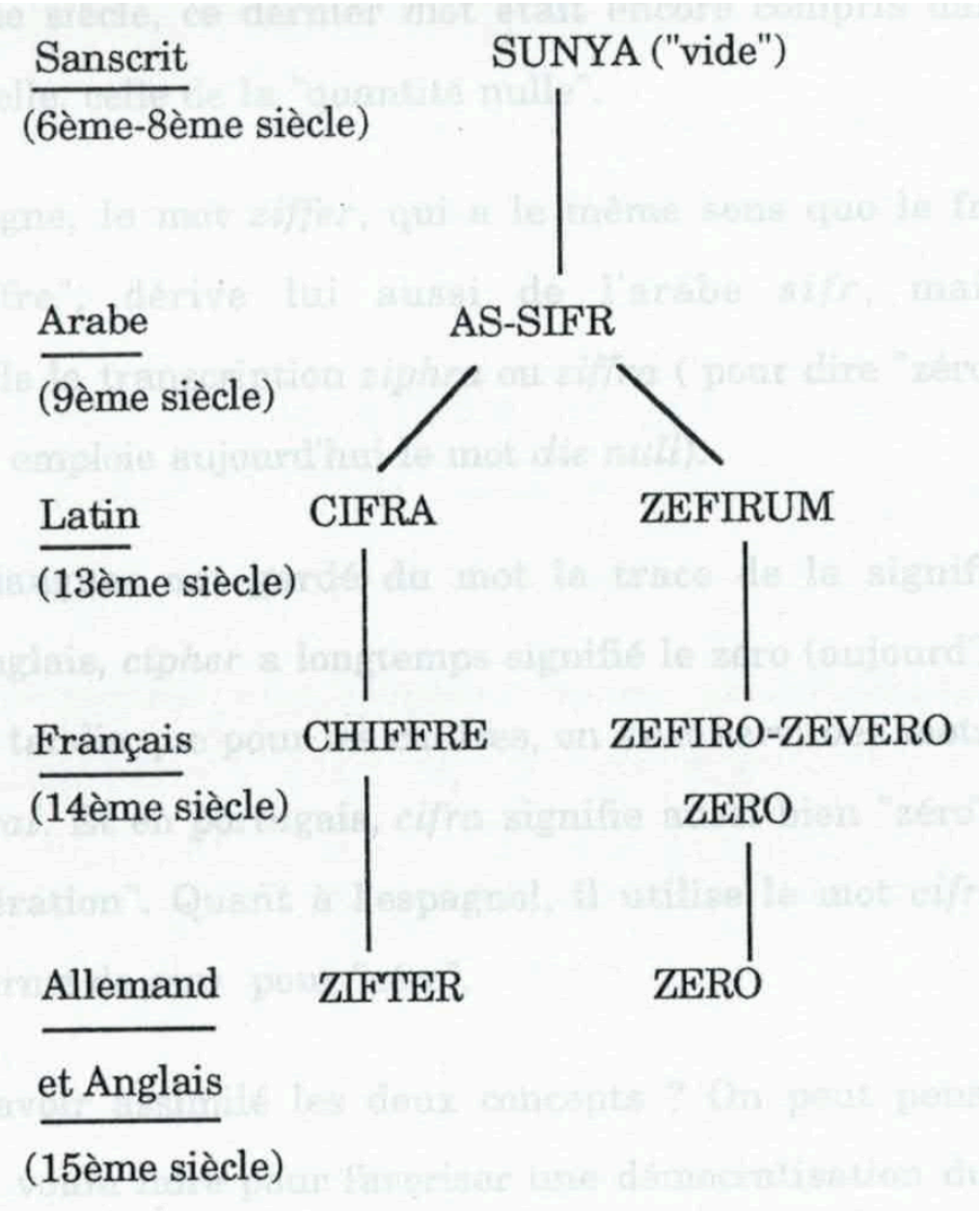
"*En concevant le zéro et en appliquant rigoureusement le principe de position à des chiffres de base détachés de toute intuition visuelle directe, les savants de l'Inde franchirent, les premiers, le pas de la numération écrite. Et, grâce à eux, les histoires parallèles de la notation numérique et du calcul se rejoignirent enfin*" (Ifrah, 1988).

C'est donc chez les Indiens que les notions complexes d'absence et de nullité se rejoignent.

Le mot zéro vient de l'italien *zero*, contraction de *zefiro,* de l'arabe *sifr,* qui veut dire vide.

Vide se dit *sunya* en sanscrit (qui fut la langue écrite de l'Inde antique). Quand, au IXème siècle, les Arabes adoptèrent la numération de l'Inde, ils traduisirent *sunya* par leur mot signifiant "vide", sifr; on peut voir sur le schéma ci-dessous, dû à Karl Menninger "Number words and number symbols" (1977), les transformations que connut le mot selon les lieux. Le zéro est entré en Occident au XIIème siècle. Dans son "Liber Abaci", Léonard de Pise (vers 1170-1250) lui donne le nom de *zéphirum,* dont on se servira jusqu'au XVe siècle. Après quelques modifications, ce mot aboutit ensuite à l'italien *zefiro,* qui donnera en fin de compte notre mot « zéro » à partir de 1491.

En plein XIXe siècle, Gauss un des derniers qui écrivit en latin, emploie encore c*ifra* avec le sens de zéro. En anglais, *cifra* est devenu *cipher*, qui veut dire chiffre mais qui a aussi conservé son acception primitive de zéro ; en France, zéro remplace l'ancien français *cifre*, qui voulait dire "zéro" et qui donnera chiffre (depuis à peine 500 ans) :



Chez Euclide, par exemple, la grandeur zéro n'existe pas.

Dans les "Fondements de l'arithmétique", Frege (1848-1925) constate, en 1884, qu'on ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes. Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre zéro. On cherchera en vain à se représenter « 0 » étoile visible.

Des disciples de Fibonacci furent envoyés au bûcher au même titre que les hérétiques et les sorcières.

On employa donc divers vocables : *sifra- cifra- cyfra- tzyphra- cifre- cyfre*... Ces mots ne furent d'abord employés que dans le sens du zéro. Plus tard, l'orthographe du terme français de *cifre* se transforma dans un premier stade en *chifre* pour aboutir finalement à chiffre. Mais au début du XVe siècle, ce dernier mot était encore compris dans son acception originelle, celle de la "quantité nulle".

En Allemagne, le mot *ziffer*, qui a le même sens que le français moderne « chiffre », dérive lui aussi de l'arabe *sifr,* mais par l'intermédiaire de la transcription *ziphra* ou *ziffra* (pour dire "zéro" dans cette langue, on emploie aujourd'hui le mot die *null*).

Plusieurs langues ont gardé du mot la trace de la signification primitive : en anglais, c*ipher* a longtemps signifié le zéro (aujourd'hui, on emploie "zéro"), tandis que pour les chiffres, on s'est servi des mots *digi*", figue" et numéral. Et en portugais, *cifra* signifie aussi bien "zéro" qu'un "signe de numération". Quant à l'espagnol, il utilise le mot *cifra* pour "chiffre" et le terme de *cero* pour "zéro".

Pourquoi avoir assimilé les deux concepts ? On peut penser que l'église n'a rien voulu faire pour favoriser une démocratisation du calcul qui entraînerait sûrement pour elle la perte de son monopole en matière d'enseignement, et par conséquent, une perte de pouvoir. Elle a préféré que le calcul reste du ressort exclusif des spécialistes, qui, d'ailleurs, étaient presque tous des clercs. Les chiffres arabes demeurent donc, pour un temps, frappés d'interdit. Tant et si bien que les amateurs du calcul moderne se trouvent dans l'obligation d'en user en cachette, un peu comme d'un code secret.

Par la suite, le calcul écrit, sur le sable ou à la plume, prend une extension considérable parmi le peuple, auquel n'échappe pas le rôle fondamental joué dans cette méthode par le *chifra* ou "zéro". La tradition populaire se sert désormais de ce nom pour identifier tout le système. Et voilà pourquoi, ce mot, sous ses différentes formes, en est venu à désigner le sens qu'il possède actuellement dans la majorité des langues occidentales.

Le zéro cause aussi beaucoup d'embarras dans la vie des écoliers et des collégiens. Voici quelques définitions données dans des dictionnaires utilisés actuellement :

-"signe numérique représenté par le chiffre 0 et qui n'a pas de valeur par lui-même, mais qui, placé à la droite d'un autre, décuple celui-ci dans le système de numération décimale" (Larousse, 1986).

-"cardinal de l'ensemble vide, élément neutre pour l'addition des nombres" (Robert,1986).

-"symbole numérique noté "0" qui indique dans l'écriture positionnelle des nombres l'absence d'unités du rang (unités, dizaines...) où il figure" (Larousse, 1988).

-"symbole numéral destiné à remplacer dans la numération écrite les ordres d'unités absentes : six et quatre dix je pose Zéro et je retiens un" ; (Fig. C'est un zéro, un homme qui ne compte pas, sans valeur, Littré, 1987).

-nombre qui représente une collection inexistante, un ensemble vide ; grandeur, valeur nulle : deux plus deux moins quatre égale zéro :

(2 +2 - 4 = 0) (Littré, 1987).

Les expressions, certes, ne sont pas équivalentes, mais il est remarquable de trouver dans ces textes le souvenir du choc provoqué par l'apparition de ce « rien du tout » qui a tant fait progresser la science. Lisons par exemple le Littré du XIXe siècle : "*C'est un zéro, un vrai zéro, un zéro en chiffre, se dit d'un homme qui n'est d'aucune considération*". Dans l'esprit des auteurs, il s'agit encore d'un sens absolu de vide, même dans certaines définitions actuelles. On ne peut que s'interroger sur les incidences que cela peut avoir pour les enfants, quand des zéros sont inclus dans les dividendes, diviseurs et quotients d'une division par exemple.

L'humanité s'est heurtée pendant des millénaires à des systèmes inadéquats et inopérants, privés d'un symbole représentant le "nul" ou "rien". Aussi s'était-elle trouvée longtemps dans l'impossibilité de concevoir les nombres "négatifs" (-1, -2, -3, etc.), dont nous nous servons couramment de nos jours pour exprimer par exemple, une température au-dessous de zéro ou encore un solde débiteur dans un compte bancaire. Et ainsi une soustraction comme 3 - 5, fut longtemps considérée comme impossible. On sait comment la découverte du zéro a permis l'extension des nombres arithmétiques ordinaires (dits "naturels") aux nombres "relatifs" par adjonction à ceux-là de leurs "symétriques" par rapport à zéro. L'usage de sa notation reste soumis aux ambiguïtés que comportent les langues humaines et à leurs diverses interprétations. L'acquisition de ce symbole donne une signification surpassant l'objet représenté, soumis aux règles du calcul ordinaire. Cette découverte qui a créé l'arithmétique moderne, au même titre que le principe de position, n'est pas sans poser question aux écoliers d'aujourd'hui. Son utilisation devient particulièrement délicate dans une opération complexe telle la division.

4-6 - Adoption de la division actuelle sous la Convention

Dans le "Cours des professeurs de l'Ecole normale de l'an III" (Dhombres, 1992), on apprend que cette école naquit de la volonté d'appliquer à l'éducation des futurs instituteurs la "méthode révolutionnaire", adoptée par le Comité de salut public en pluviôse an II (février 1794) afin de former des techniciens sachant raffiner du salpêtre, fondre et forer les canons, et capables de répandre à leur tour ces méthodes : " Le nouveau régime a tout accéléré" commentait Barère devant la Convention. Le 1er juillet 1794, il précisait : "*ce mode révolutionnaire de cours publics*

est devenu pour le Comité un type d'instruction qui lui servira utilement pour toutes les branches des connaissances utiles à la République : et vous ne tarderez pas à en sentir le besoin au milieu d'une ligue vandale ou wisigothe qui veut encore proclamer l'ignorance, proscrire des hommes instruits, bannir le génie ou paralyser la pensée". Lakanal et Garat engagèrent la Convention dans une décision : "*Vous avez voulu créer à l'avance, pour le vaste plan d'instruction publique qui est aujourd'hui dans vos desseins et dans vos résolutions, un très grand nombre d'instituteurs capables d'être les exécuteurs d'un plan qui a pour but la régénération de l'entendement humain dans une République de vingt-cinq millions d'hommes que la démocratie rend tous égaux. Dans ces écoles, ce n'est donc pas les sciences que l'on enseignera, mais l'art de les enseigner ; au sortir de ces écoles, les disciples ne devront pas être seulement des hommes instruits, mais des hommes capables d'instruire*." L'école était créée le 9 brumaire an III (30 octobre 1794), et 1400 élèves étaient attendus.

Le rôle de ces cours de l'an III est d'autant plus important que, bientôt, les mathématiques deviennent une discipline obligatoire dans les lycées, alors qu'elles n'étaient qu'optionnelles dans les classes de philosophie des collèges sous l'ancien régime. Les pages de ces cours proviennent des très grands mathématiciens Lagrange, Laplace et Monge qui les ont écrites.

La première leçon de Laplace est celle qui nous intéresse et concerne le système métrique et sa décimalisation. "Très prosaïquement pour les leçons de l'Ecole normale, en prenant le soin de calculer à nouveau selon les latitudes les longueurs des portions du méridien terrestre, utilisant le grade (division de l'angle droit en 100 parties) et non le degré. Sa conviction était profonde, aussi bien pour la décimalisation du temps décidée le 4 frimaire an II (24 novembre 1793), qui, en dehors de la décade et du comput des mois, n'était pourtant plus d'actualité à l'époque du cours et pour laquelle Laplace s'engageait encore : "*On peut croire cependant qu'à la longue la division décimale du jour remplacera sa division actuelle, qui contraste trop avec les divisions des autres mesures pour ne pas être abandonnée*" (Dhombres, p. 49, 1992).

De nouveaux noms furent dès lors en usage : le mètre, dont Borda semble être le père, le gramme : les deux étymologies relevant du grec et donc du caprice des savants. "*Caprice puisque la kyrielle des multiples et sous-multiples selon l'ordre décimal, mélangeait l'origine latine (milli, centi, déci) et l'origine grecque (myria, kilo, etc..), du myriamètre au millimètre, de l'hectare au centiare pour les aires, de la cade au centicade pour les volumes, du franc au décime et centime pour les monnaies. Bref, tout un vocabulaire neuf entrait de force dans la vie du citoyen ordinaire, et la sémantique choisie devait en principe éradiquer les conjugaisons des rapports si divers entre les stade, perche, maille, gros ou grain ?*" (Dhombres, p. 27, 1992).

La révolution, si l'on veut résumer, fut de supprimer les passages faciles aux divisions par trois, quatre ou douze, au profit des seules divisions par 10.

Citons pour l'exemple, **l'intégralité de la première leçon de Laplace** du 1er pluviôse (20

janvier 1795), qui décrit et définit le processus de la division :

"Pour la division, on prend à gauche du dividende, le nombre de chiffres nécessaires pour contenir le diviseur ; on cherche combien de fois il est contenu dans le dividende partiel ; on écrit ce nombre, qui forme le premier chiffre à gauche du quotient […]»

On multiplie ce quotient partiel par le diviseur, on retranche le produit du dividende partiel ; à côté du reste, on abaisse le chiffre suivant du dividende et l'on forme un nouveau dividende partiel, que l'on divise de nouveau par le diviseur ; on écrit le quotient à droite du premier ; on continue ainsi jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende soient abaissés ; ainsi la division est encore une opération très simple, qui résulte du système de numération.

Vous concevez que la facilité des opérations que je viens de vous décrire, dépend de la loi que suivant les unités des nombres en allant de gauche à droite les unités deviennent successivement de dix en dix fois plus petites; mais rien ne force de s'arrêter aux unités simples: de même que l'unité simple est la dixième partie des dizaines, de même vous pouvez imaginer les unités fractionnaires qui soient la dixième partie des unités simples; et par la même raison, vous pouvez concevoir des dixièmes de dixième, ou des centièmes parties de l'unité principale, des millièmes, des dix millièmes, etc. Alors on forme ce que l'on appelle des nombres décimaux, et pour distinguer dans un nombre composé de décimales, les nombres décimaux, on met une virgule après le nombre qui exprime les unités simples....

Dans la division, il ne faut mettre après la virgule que l'excédent du nombre des chiffres décimaux du dividende, sur le nombre des chiffres décimaux du diviseur. Avec cette seule attention, les mêmes règles qui ont lieu pour les entiers, s'appliquent aux décimales.

Dans la société, *on a continuellement besoin d'employer des fractions d'unités, ou de diviser l'unité en parties plus petites, et ces parties en d'autres parties. Vous sentez par là de quel avantage il est que toutes les divisions de l'unité soient décimales, parce que de cette manière, toutes les opérations d'arithmétique se trouvent réduites à celles que l'on fait sur les nombres entiers.*

C'est là ce qui a fait adopter par la Convention Nationale le système de la division de toutes les unités en parties décimales. ***Pour connaître les avantages de ce système, il suffit de vous rappeler l'extrême complication qui résulte des divisions anciennement adoptées, quand il s'agit de multiplications ou de divisions complexes***. »

Vous trouverez dans l'instruction qu'a publiée sur cet objet la commission des poids et mesures la méthode d'opérer par les décimales exposées dans le plus grand détail ; ainsi je vous invite à lire cette instruction pour vous convaincre de la grande utilité du système décimal, et pour vous mettre bien au fait des règles et des opérations qu'il faut faire dans ce système...

Cette arithmétique a de plus un avantage, c'est de réduire toutes les multiplications à de simples additions, et toutes les divisions à de simples soustractions *; mais elle a un inconvénient qui ne permet pas de l'employer dans l'usage civil, c'est la multiplicité des caractères pour exprimer des nombres fort simples : le nombre mille vingt-quatre, par exemple, exigerait onze caractères.*

De tous les systèmes de numération, le meilleur est celui qui, n'employant pas un trop grand nombre de caractères, renferme dans son échelle le plus grand nombre de diviseurs ; et, à cet égard, le système duodécimal me paraît mériter la préférence. Il eût suffi d'ajouter deux caractères aux nôtres ; on aurait eu l'avantage d'exprimer le tiers et le quart de l'unité principale, au moyen des divisions de ce système, ce qui eût été très commode. C'est pour cela que les divisions de presque toutes nos mesures sont duodécimales ; ainsi le pied se divise en douze pouces, le pouce en douze lignes, etc.

Pour traduire un nombre écrit dans le système décimal, dans le système duodécimal, divisez le nombre proposé, par l'échelle du nouveau système, par douze ; écrivez le reste à gauche du second reste, ou zéro, s'il ne reste rien. Divisez le premier quotient par le même nombre douze ; écrivez le reste à gauche du premier reste que vous avez trouvé. Divisez le second quotient par douze : écrivez le reste à gauche du second reste, et ainsi de suite. En continuant l'opération, vous parviendrez à écrire, dans le système duodécimal, le nombre écrit dans le système décimal." […]

CONCLUSION

L'introduction de notre opération actuelle de la division a donc remplacé la méthode "**Galley**" qui était en usage jusqu'alors. Ceci se confirme grâce à l'étude que nous avons faite des documents de cette époque, présentée dans le chapitre suivant.

Il y a certainement un rapport à établir entre le processus historique du développement de la division par lequel les modèles se sont construits, et les processus de mathématisation que l'on s'efforce de favoriser chez l'enfant pour qu'il s'approprie l'algorithme. Notre intérêt a porté ici sur la question de savoir comment la division actuelle a été introduite.

La première réflexion que nous inspire cette étude, est tout simplement l'apparition tardive de la division décimale, sous sa forme actuellement enseignée. Le chapitre suivant illustre le "passage" relativement récent de la méthode "**Galley**" à la méthode actuelle, grâce aux documents que nous avons trouvés au Musée National de l'Education de Rouen (cahiers d'élèves et manuels), et à l'I.N.R.P. (Institut National de Recherche Pédagogique) à Paris.

Les quotients ou résultats de l'opération de division étaient représentés par des nombres

entiers et les restes sous forme fractionnaire, dans la période précédant la Convention. Nos observations, effectuées sur des élèves de la fin de l'école élémentaire et du début du collège (voir la partie empirique de cette recherche), nous ont fait constater que les opérations les mieux acquises ne comportent pas de nombres décimaux. La virgule forme un obstacle dans le calcul du quotient. Le problème d'enseignement ainsi soulevé concerne l'aide à apporter aux enfants pour qu'ils dépassent la structure des naturels. Le raffinement supplémentaire occasionné par le calcul de la partie décimale du quotient a été pendant longtemps ignoré, le concept de nombre décimal n'existant pas.

Les calculs s'appuyaient le plus souvent sur les tables de multiplication et les abaques, et selon les périodes, étaient réservés à certains érudits. L'accent est souvent mis sur la difficulté de l'opération de division, et la longueur du calcul. Remarquons qu'il a fallu beaucoup de siècles pour que sa forme actuelle l'emporte. Ce n'est pas un phénomène sans incidences dans la mémoire des hommes. Sans parler de mécanismes cognitifs, ou de mécanismes opératoires, on peut avancer, compte tenu des disparités entre les conditions des genèses historiques et des apprentissages scolaires, l'hypothèse de l'existence pour l'enseignement actuel de noeuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques.

Pour tout individu et pour toute notion, on assiste à une combinatoire complexe de mécanismes. Bachelard, dans "la formation de l'esprit scientifique" (1938), expose sa méthode pour parler des obstacles épistémologiques historiques. Si Bachelard reconnaît des contenus à une notion, s'il réfère ces contenus à des modes de pensée, c'est qu'il insiste sur le particulier, le singulier et la culture, et sur les processus de formation sociale des concepts. Il nous propose ainsi de penser que la culture intègre et dépasse la croissance historique des idées. Ceci appelle, des questions sur lesquelles nous devons continuer à réfléchir, afin d'avancer dans le sens d'une mise en relation entre la construction historique et l'appropriation individuelle des connaissances. Nous reviendrons sur ce point dans la partie théorique de notre recherche.

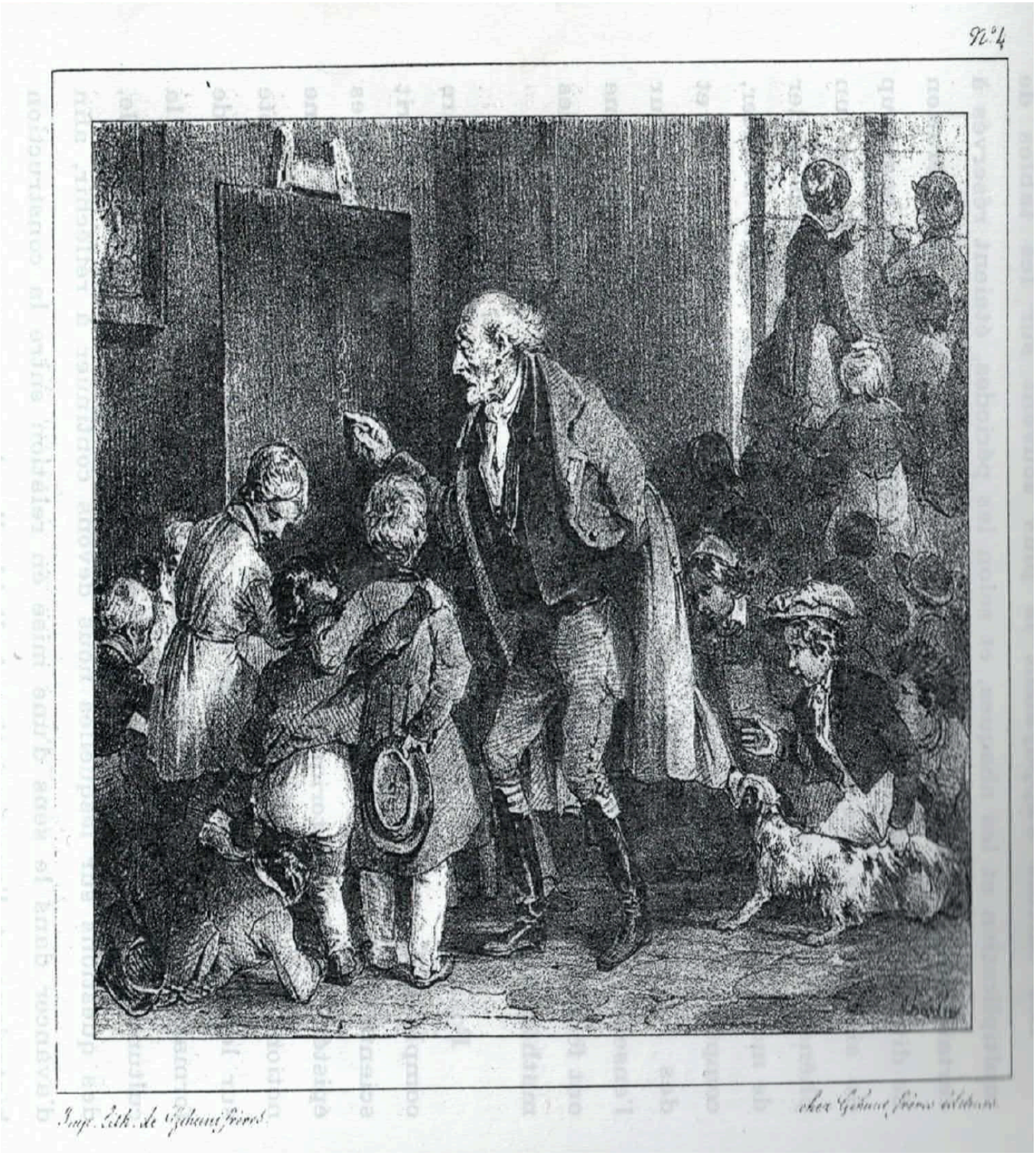


Illustration : L'ARITHMETIQUE

I.N.R.P. Paris

CHAPITRE II : ETUDE DE CAHIERS D'ELEVES ET DE MANUELS : Ou comment s'est effectué le passage de la méthode GALLEY à la méthode actuelle

INTRODUCTION

Puisqu'elle appartient à l'histoire, celle des mathématiques, mais aussi celle de l'enseignement des mathématiques, l'histoire de la division que nous venons d'évoquer constitue un fragment de notre héritage sur lequel repose en partie l'arithmétique élémentaire que nous enseignons aujourd'hui.

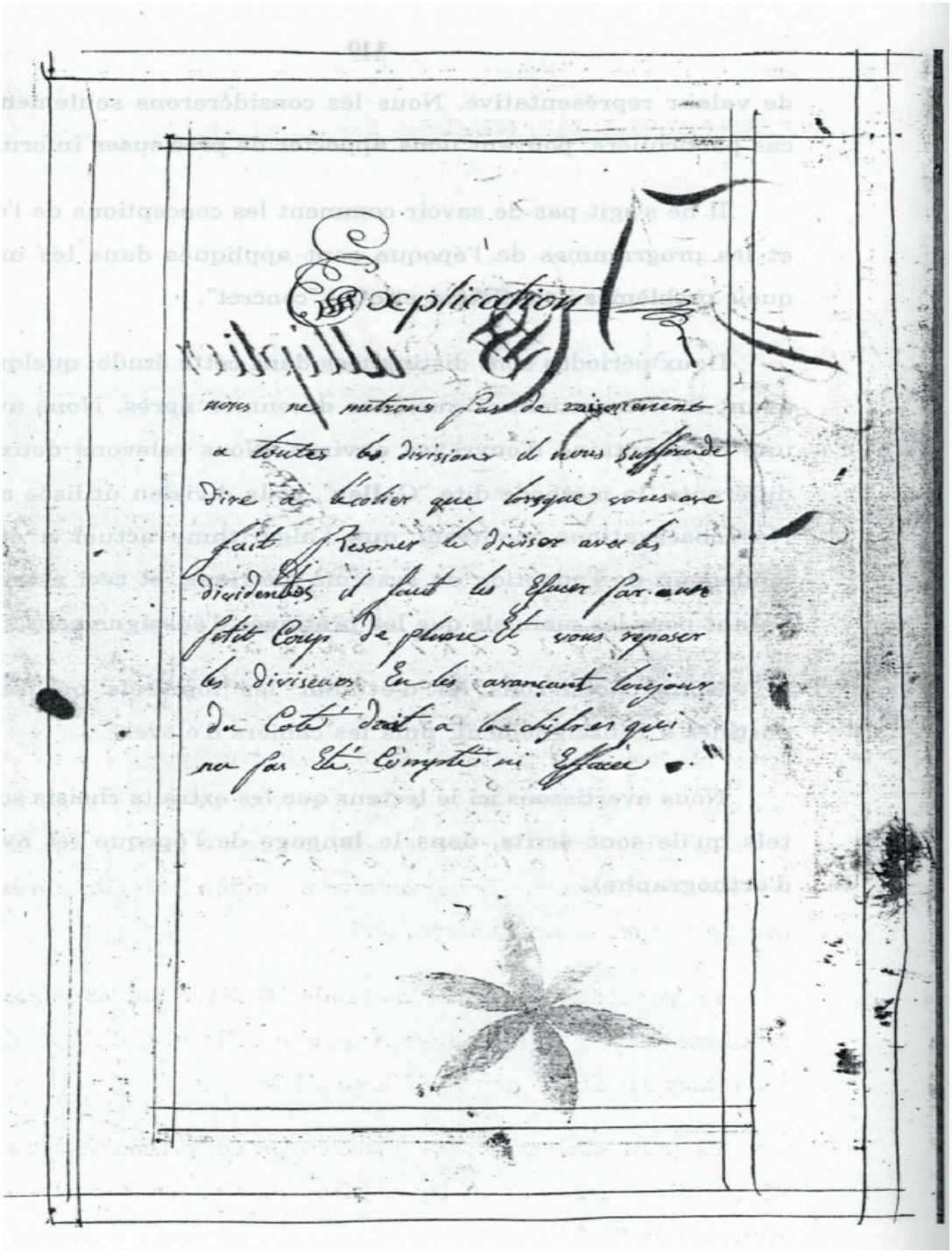
A l'aide de divers documents, archives et cahiers d'élèves notamment, nous poursuivons l'étude de certains témoignages sur les algorithmes qui étaient en usage en France, pendant la période de la Convention. Cette étude peut contribuer à brosser le portrait de l'enseignement des mathématiques de cette époque, également à savoir le passage en France des anciennes méthodes à la nouvelle.

La richesse et la multiplicité des documents conservés au Musée National de l'Education de Rouen, et à l'Institut National de Recherche Pédagogique de Paris ont nécessité un choix. D'autres documents (dont certains ont été étudiés et seront l'objet de recherches ultérieures), permettent d'appréhender d'autres aspects de l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles élémentaires françaises.

Cette étude ne sera pas exhaustive puisqu'elle portera sur un échantillon d'ouvrages de manuels ou de cahiers d'élèves, et n'aura pas de valeur représentative. Nous les considérerons seulement comme des cas particuliers, pouvant nous apporter de précieuses informations. Il ne s'agit pas de savoir comment les conceptions de l'enseignement et les programmes de l'époque sont appliqués dans les manuels, mais quels problèmes ils reflètent et quel "concret".

Deux périodes sont distinguées dans cette étude : quelques décennies avant la Convention, et quelques décennies après. Nous avons consulté une cinquantaine d'ouvrages environ. Nous relevons deux algorithmes différents (la méthode dite "Galley", et la division utilisée actuellement). Nos observations montrent que l'algorithme actuel a été adopté au lendemain de l'adoption du système métrique, et ceci assez rapidement, autant pour les manuels que les pratiques d'enseignement.

Nous choisissons ici d'étudier les manuels ou les manuscrits destinés à l'enseignement, puis les cahiers d'élèves. Nous avertissons ici le lecteur que les extraits choisis sont reproduits tels qu'ils sont écrits, dans le langage de l'époque (et avec les fautes d'orthographe).



LIVRE D'ARITHMETIQUE (Auteur inconnu, vers 1700)

Source : Musée National de l'Education de Rouen

1- ANALYSE DE MANUELS

1-1 Analyse de manuels avant la Convention

1-1-1 Livre d'arithmétique (auteur inconnu, 1700 environ)

Nous choisissons ici un extrait de cet ouvrage (voir ci-contre) qui décrit rapidement la procédure d'une division :

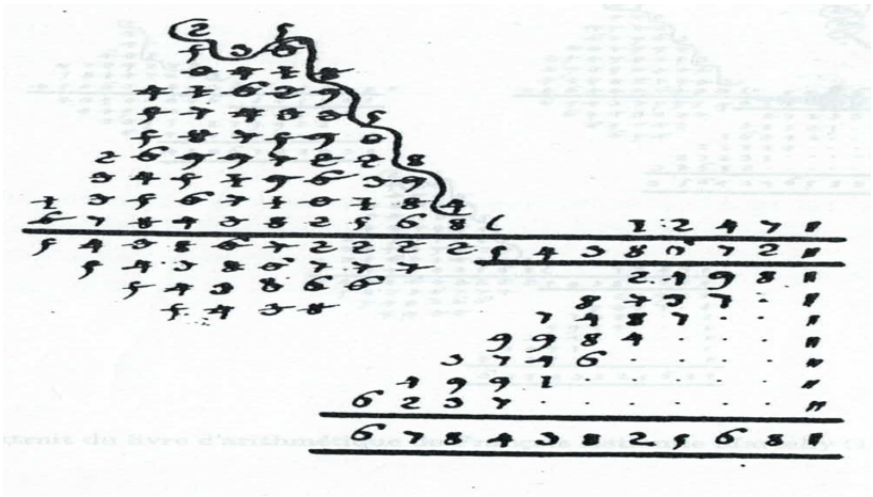
> *"Quatrième règle générale d'arithmétique*
>
> *Nous ne mettrons pas de raisonnement à toutes les divisions. Il nous suffira de dire à l'écolier que lorsque nous avez fait raisonner le diviseur avec les dividendes il faut les efacer par un petit coup de place et vous reposer les diviseurs. En les avançant toujours du côté droit a les chiffres qui na pas été compté ou effacée."*

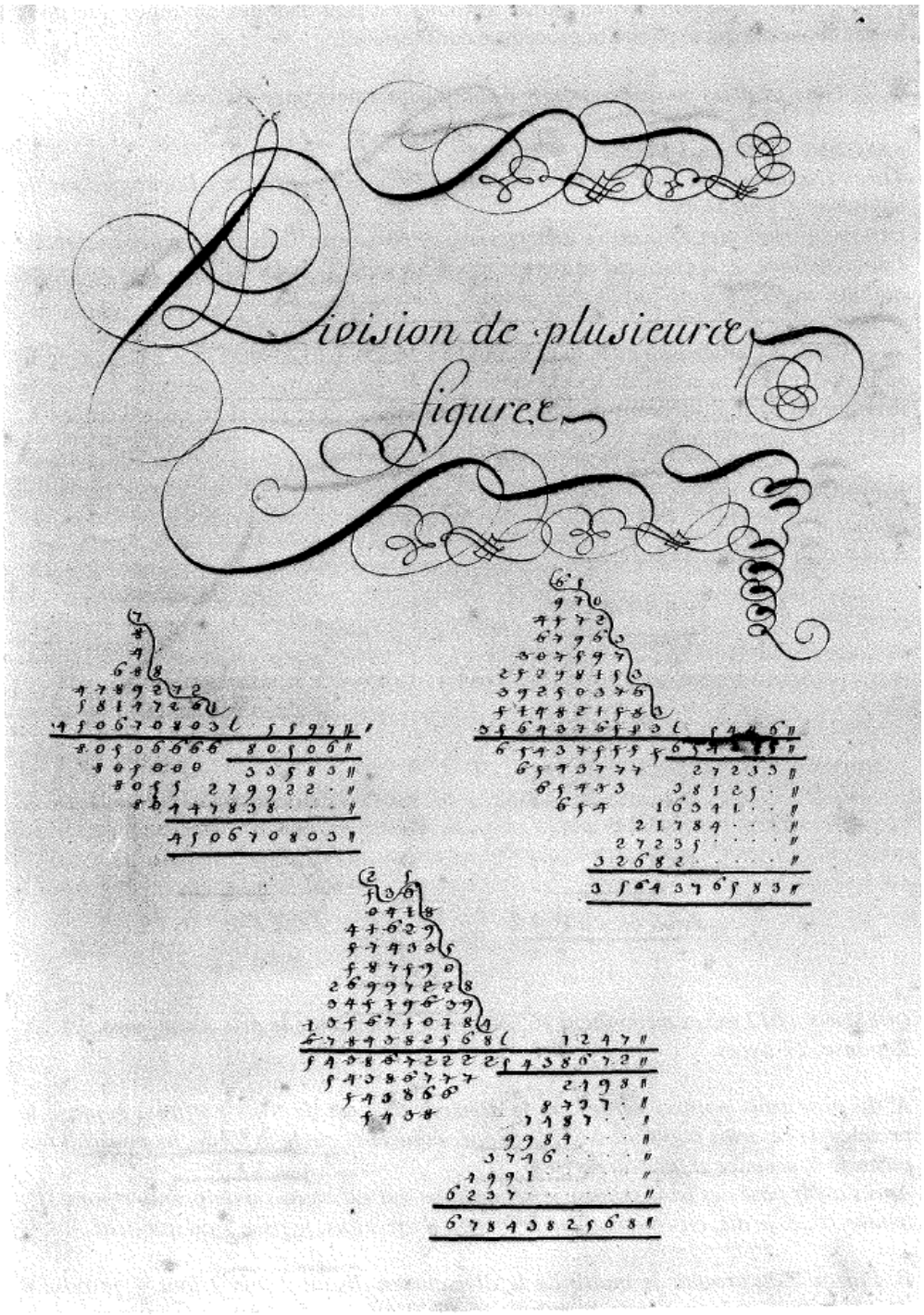
La procédure, dans la méthode "**Galley**" qui consiste à effacer les nombres au fur et à mesure, rappelle celle qui était utilisée quand on effectuait ces divisions au XVIe siècle

Le paradoxe est soulevé entre ce qui est préconisé dans l'usage, et les illustrations du livre où les chiffres sont rayés dans les divisions.

1-1-2 Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736)

Nous choisissons ici une page illustrant une "Division de plusieurs figures" (voir le documentci-dessous). Ici encore, la méthode "**Galley**" est utilisée. La procédure est systématiquement accompagnée de la vérification avec la multiplication. Dans de nombreux documents illustrant la période avant la Convention, on retrouve cette "preuve" qui accompagne les divisions, élément de contrôle systématiquement préconisé dans l'usage.





Livre d'arithmétique de François Estienne Martelly daté de 1736.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

Extrait du livre d'arithmétique de François Estienne Martelly (1736)

(Source : Musée National de l'Education de Rouen)

1-1-3 Livre d'arithmétique de Barreme (1788)

L'extrait que nous avons choisi d'étudier est issu d'un des seuls ouvrages que nous avons consultés qui explicite la procédure dans le détail. Nous choisissons de reproduire d'abord la première page *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)* :

"LA DIVISION - ARITHMETIQUE DE BARREME (1788)

Titre: L'arithmétique du sr Barrême ou le livre facile pour apprendre l'Arithmétique de soi-même & sans Maître;

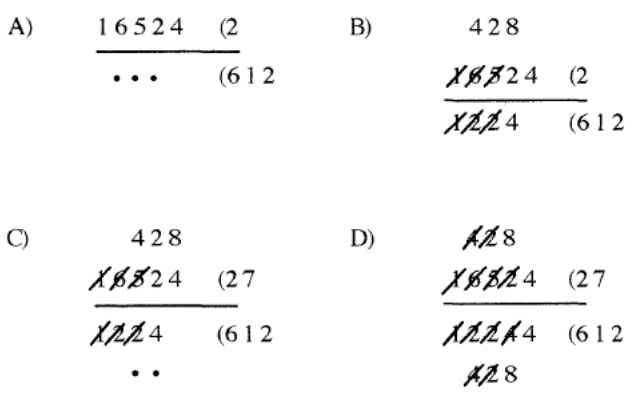
OUVRAGE TRES NECESSAIRE A TOUTE sorte de personnes : aux unes, pour apprendre l'Arithmétique, & à ceux qui la savent, pour les aider à rappeler dans leur mémoire quantité de Règles qui s'oublient facilement, faute de pratique.

Trois divisions sont ensuite expliquées : 16524 ÷ 612, 959574 ÷ 3114 (avec le reste 462 qui est encadré), et 15000000 ÷ 714. Nous remarquons que cette fois -ci, le diviseur est écrit au-dessous du quotient. Pour la première division, 4 étapes A, B, C, et D sont indiquées.

INSTRUCTION

DIVISION

A plusieurs Chiffres au Diviseur



QUESTION : 612 toises me coûtent 16524 livres, je demande le prix d'une toise.

Réponse, 27 livres.

A. « Je pose trois points, parce que le diviseur 612 est de trois chiffres. je pose le premier de ces trois points dessous le 6, parce que le 1, qui le précède, ne pourroit pas payer le 6, premier chiffre du diviseur.

Après avoir posé ces trois points, je regarde ce qui est dessus mon premier point, j'y trouve 16, & je dis, en 16 combien de fois 6; il est 2 fois, je pose 2 au quotient.

B. Par ce 2 du produit je multiplie le diviseur en disant 2 fois 2 font 4, je pose 4 dessus le point qui représente 2 ; ensuite je dis, 2 fois 1 font deux, que je pose sur le point qui représentoit 1, & puis 2 fois 6 font 12, que je pose dessous 16; je finis cette première opération en soustrayant 1224 de 1652. Il reste 428, que je pose dessus les chiffres qui ont payé, & je barre les huit chiffres qui ont servi à la soustraction.

C. Je commence la seconde opération par la position des trois points ; je regarde ce qui est au-dessus du point qui représente 6; il est 7 fois, je pose 7 au quotient."

Remarquons ici que le positionnement des trois nouveaux points n'est pas explicité (ordre de grandeur ?). Par ailleurs, le positionnement préconisé des trois points non alignés, n'est pas justifié.

"D. Et par ce 7 je multiplie le diviseur, commençant toujours par le dernier chiffre à droite, c'est-à-dire, par 7 fois 2, &

Cette multiplication finie, il ne reste plus qu'à barrer 4 284 haut & bas, parce que cette soustraction ne produit pas de reste. Ce principe suit la soustraction.

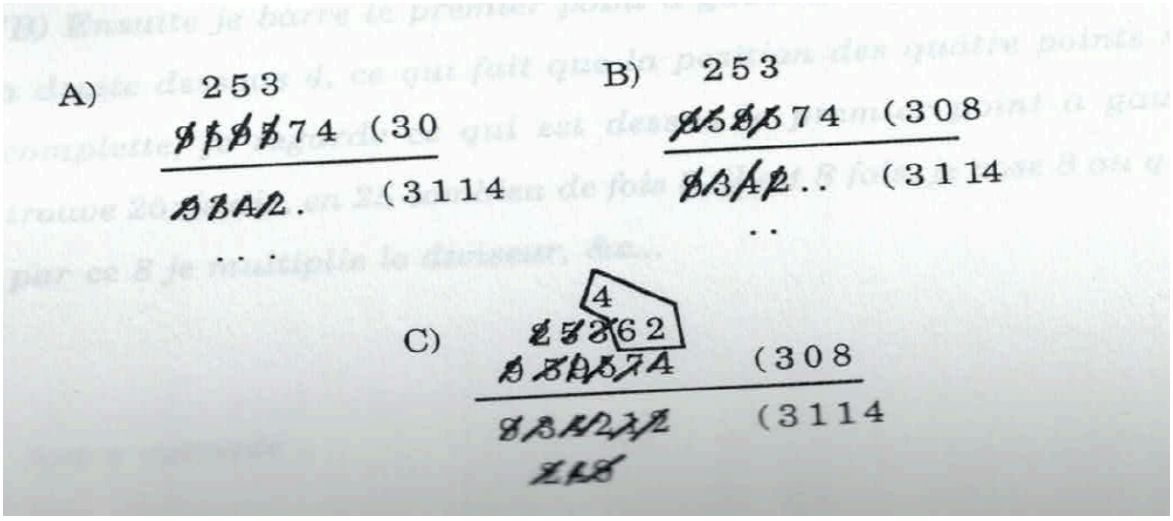
La Multiplication est la preuve ordinaire de la Division.

Cette division se trouve en multipliant le diviseur 612 par le quotient 27.

Il viendra 16 524."

Une autre opération explique le positionnement d'un zéro intercalaire au quotient.

"*Où il se trouve la difficulté des zéros :*



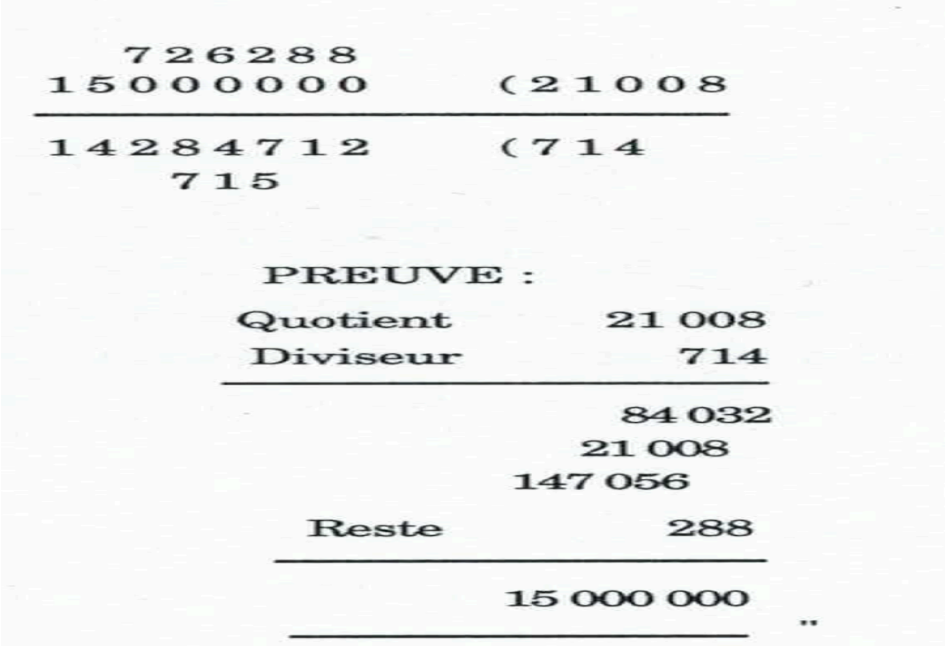
A) « Je pose quatre points, parce que le diviseur est de quatre chiffres ; ensuite je regarde ce qui est dessus le premier point à gauche, j'y trouve 2; je dis en 9 combien de fois 3; il est 3; je pose 3 au quotient, & par ce 3 je multiplie le diviseur à droite; cette multiplication donne 9 342, que j'ai posé dessus les quatre points posés: je finis cette première opération en faisant la soustraction, & je trouve qu'il reste 253.[…]

[…] Je commence la seconde opération par la position des quatre points, posant le premier dessous 7, & les trois autres toujours à la gauche ; ensuite je regarde ce qui est dessus le premier point à gauche, j'y trouve 2, & je dis, en 2 combien de fois 3 ; il ne peut s'y trouver une fois, je pose un zéro au quotient."

L'expression ("combien de fois") est encore en usage actuellement. L'auteur donne une définition de la division qui suit le principe de la soustraction, et préconise le support de la multiplication (preuve).

B) « *Ensuite je barre le premier point à gauche, & j'avance un autre point à droite dessous 4, ce qui fait que la position des quatre points se trouve complette; je regarde ce qui est dessus le premier point à gauche , j'y trouve 25; je dis, en 25 combien de fois 3, il est 8 fois, je pose 8 au quotient & par ce 8 je multiplie le diviseur, &etc… »*

Autre exemple :



Le reste est ajouté à la multiplication. à la fin du calcul

Les chiffres utilisés dans une division "**Galley**" sont écrits les uns sur les autres à la gauche du calcul. Aucune justification ne vérifie ce qu'affirmait Smith (1958): la présentation des chiffres serait gérée par le principe d'économie de papier, celui-ci étant "coûteux" !

1-2 - Analyse de manuels après la Convention

1-2-1 Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine de Bezout (1798)

Deux extraits sont choisis *(Sources : Musée National de l'Education de Rouen)*. Le premier illustre une définition du quotient fractionnaire, et le deuxième la procédure de l'algorithme (celui que nous utilisons actuellement) :

Extrait 1 : "***De la division des nombres entiers, et des parties décimales***."

"Diviser un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second. Le nombre qu'on doit diviser s'appelle Dividende; celui par lequel on doit diviser, Diviseur, et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle le quotient. "

Cette conception ne retient pas de façon claire, le cas où le dividende n'est pas contenu dans

le diviseur :

"*On n'a pas toujours pour but, dans la division, de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme si elle tendoit à ce but, c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.*

Il suit de là, que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende, puisque c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger ; car le dividende & le diviseur restant les mêmes, le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement, peut-être fort différent par la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8 contiennent 4 la toise, le quotient fera 2 toises, qui est un nombre concret, & *dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.*

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient."

Extrait 2 : ***De la division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.***

L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre de un ou deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connaissance déjà acquise, quand on fait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la table que nous avons donné ci-dessus (table de Pythagore)."

(L'utilisation des tables de multiplication est ici préconisée une nouvelle fois.)

"*Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, & je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72 ; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis de 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.*

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviseur à côté du dividende, séparez l'un de l'autre par un trait, & soulignez le diviseur

sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez."

Le fait de souligner le diviseur n'est pas retenu dans les autres manuels étudiés. Par ailleurs, la procédure requiert un encadrement des chiffres composant le quotient.

"*Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur. Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur, écrivez ce nombre de fois sous le diviseur. Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, & portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer. Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, & vous aurez un reste.*"

Il est notable de constater que la soustraction requise est posée. Cette remarque est d'ailleurs valable dans tous les manuscrits étudiés.

"*A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal, & vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant & retranchant le produit comme ci-devant.*

Vous abaisserez de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous aurez abaissé, & vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement." *[…]*

(Ici, la partie décimale n'est pas calculée, la virgule n'étant pas adoptée encore à cette époque.)

"*Cette règle va être éclairée par l'exemple suivant […]*

Il suit alors toute une description avec les expressions "*combien de fois*", "*j'écris*", "*j'abaisse en disant*". Là encore nous remarquons que nous employons encore ces termes à l'heure actuelle.

"[…] Le quotient qu'on trouve par cette voie n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée, mais outre que cette affirmation met presque toujours un sur le but, & que dans les cas où elle n'y est pas, elle en écrase un peu; la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement.

(L'explication de la procédure représentait déjà "une longue souffrance" !)

En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur 3 fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, on auroit un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans le dividende & par conséquent, la soustraction deviendra impossible; alors on diminue le quotient successivement d'une, deux, &tc... unités jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si l'on n'avait mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouveroit plus grand que le diviseur, ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, & que par conséquent le quotient est trop faible."

De la même façon qu'il est impossible pour l'auteur de concevoir une soustraction de deux nombres dont le premier est plus petit que le second, il n'envisage pas une division dont le dividende est inférieur au diviseur.

"*On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier; mais comme cette recherche feroit souvent longue & pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur*."

1-2-2 Extrait de cours d'instituteur (1843)

Ce document nous montre un extrait de cours d'instituteur exerçant dans les Alpes en 1843 Le diviseur est appelé le contenu. Le dividende est à chaque fois considéré comme supérieur au diviseur *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)* :

"*Le nombre qui exprime combien de fois le plus grand est contenu dans le plus petit, est le quotient (du latin quotier, combien de fois). Il est évident que le contenu répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient doit reproduire le dividende*".

L'auteur souligne l'aspect ardu de l'exécution de l'opération :

"*En entremêlant en effet les mots de produit et de dividende, de multiplicande et de diviseur, de multiplicateur et de quotient, en entremêlant ainsi les idées de multiplication et de division, ils ont par celle-ci un véritable labyrinthe dont l'esprit ne parvient à sortir qu'après les plus pénibles efforts*."

Quelques définitions sont données, et réfèrent curieusement à la division appelée "**danda**" (mot qui veut dire "donner") du XVIe siècle :

"*Le quotient est toujours un nombre abstrait.… Dividende et contenu sont de même matière.… Le*

résultat de la division est donc de donner comme nous l'avons déjà dit plus haut, tantôt le contenu, tantôt le quotient… Vouloir contraindre ce résultat à donner constamment dans tous les cas le quotient, c'est vouloir tomber dans l'absurde."

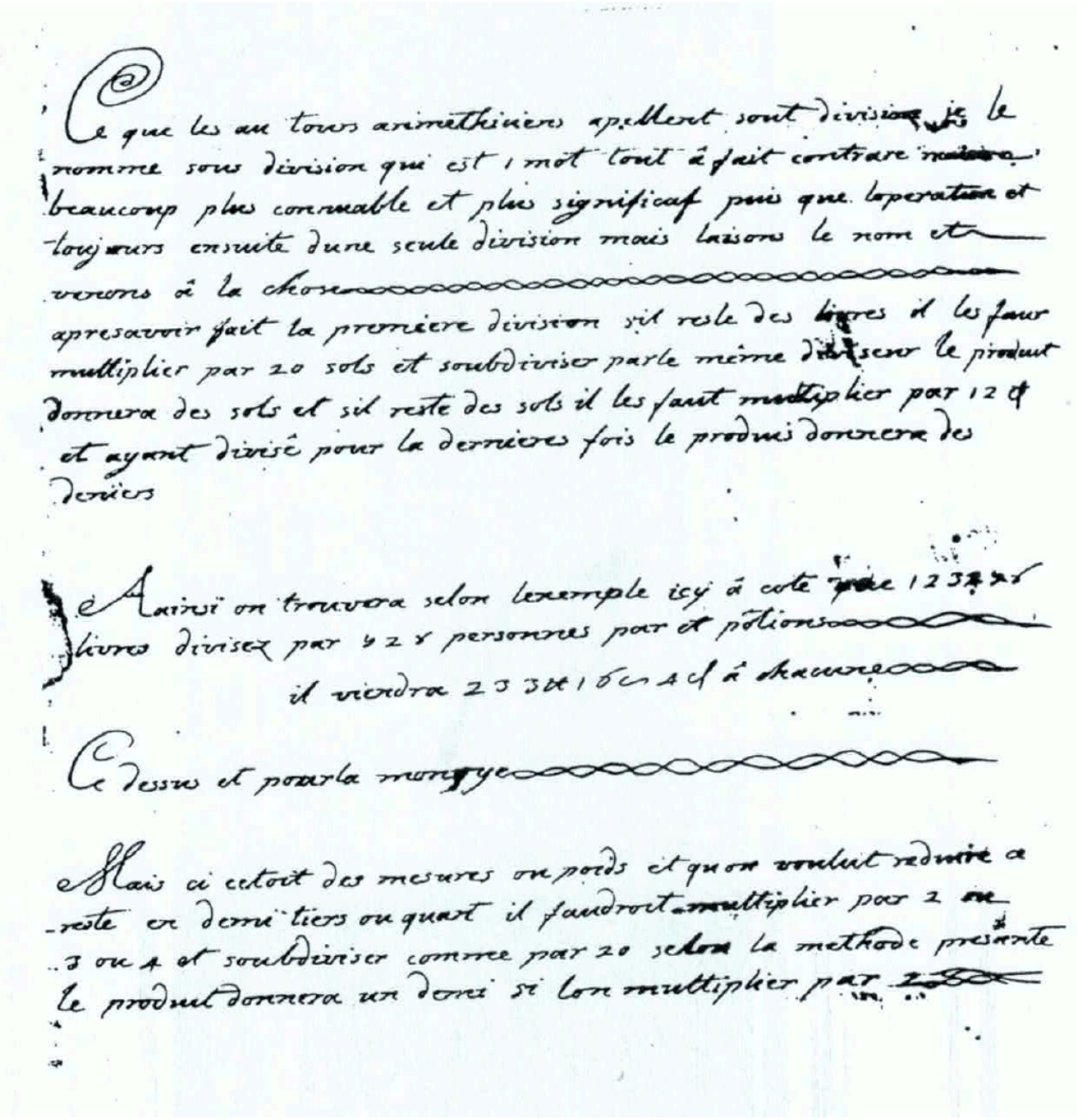
L'auteur soulève ici les problèmes de ce type de définition qui suit celle de la division de type quotition (recherche du nombre de parts). La division de type partition (recherche de la valeur d'une part, avec un dividende et un quotient qui peuvent être de nature différente) n'est pas évoquée.

2 - ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES OU "D'ELEVES PROFESSEURS"

2-1 Analyse de cahiers d'élèves avant la Convention

2-1-1 Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas (1761)

Dans le cahier d'arithmétique de Joseph Toucas en 1761, nous choisissons d'étudier les pages 186, 172, et 173. *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)*. La procédure utilisée suit la méthode "Galley".

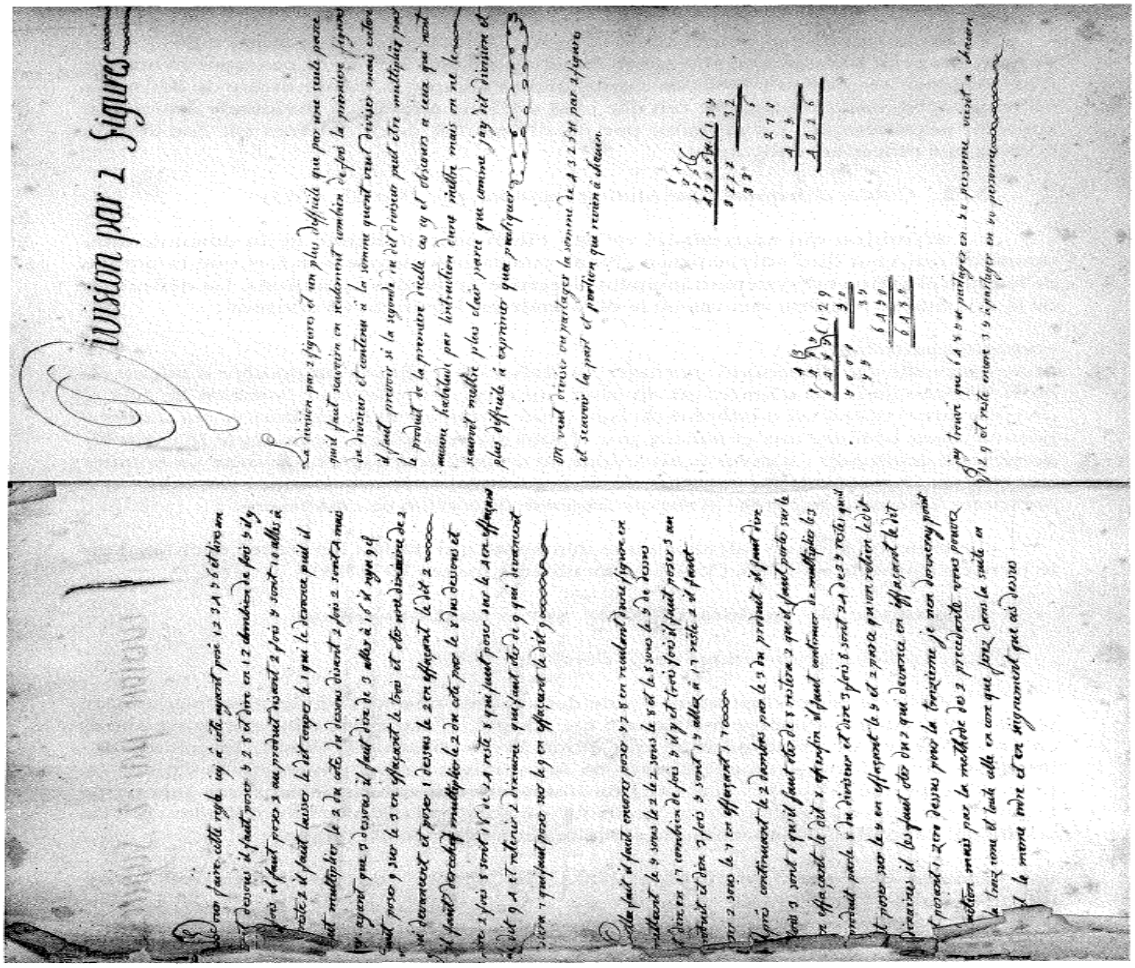


Ce que les au tours arimethiciens apellent sout division je le nomme sous division qui est 1 mot tout â fait contrare beaucoup plus connuable et plus significaf puis que loperation et toujours ensuite dune seule division mais laisons le nom et venons â la chose apresavoir fait la premiere division sil reste des livres il les faut multiplier par 20 sols et soubdiviser parle même diviseur le produit donnera des sols et sil reste des sols il les faut multiplier par 12 ¢ et ayant divisé pour la dernieres fois le produis donnera des deniers

Ainsi on trouvera selon lexemple icy â cote que 1232 ... livres divisez par 528 personnes par et pôtions il viendra 2 3 3 tt 16 s 4 d â chacune

Ce dessus et pourla monnye

Mais ci cetoit des mesures ou poids et quon voulut reduire ce reste en demi tiers ou quart il faudroit multiplier par 2 ou 3 ou 4 et soubdiviser comme par 20 selon la methode presante le produit donnera un demi si lon multiplier par 20



Cahier d'arithmétique de Joseph Toucas, daté de 1761. Page 173.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

CAHIER D'ARITHMETIQUE DE JOSEPH TOUCAS, 1761

"Ce que les auteurs arithméticiens appelent sont division, je le nomme sous division qui est un mot tout à fait contrare mais beaucoup plus significatif puisque l'opération et toujours ensuite d'une seule division mais laissons le nom et venons à la chose.

Après avoir fait la première division s'il reste des livres il faut les multiplier par 20 sols et soubdiviser par le même diviseur le produit donnera des sols et s'il reste des sols il les faut multiplier par 12 et ayant divisé pour la dernière fois le produis donnera les deniers.

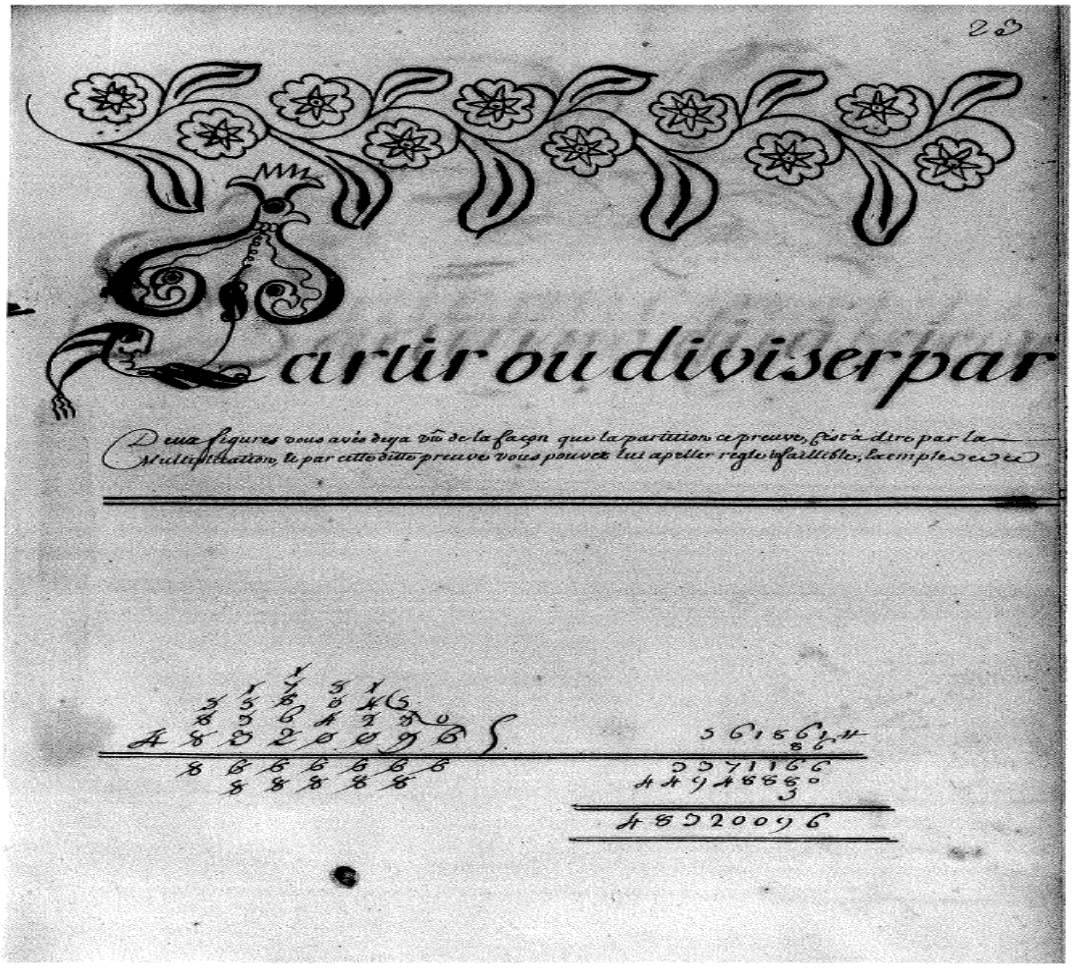
La division par 2 figures et un plus difficile que par une seule parce qu'il faut scavoir on seulement combien de fois la première figures du diviseur et contenu à la somme quont veut diviser mais entore il faut prevoir si la segonde du dit diviseur peut être multiplier pa le produit de la première dicelle ces cy et obscours à ceux qui nont aucune habitude par l'instruction d'une mettre

mais on ne le scauvoit mettre plus clair parce que comme jay dit division et plus difficile à exprimer qua pratiquer."

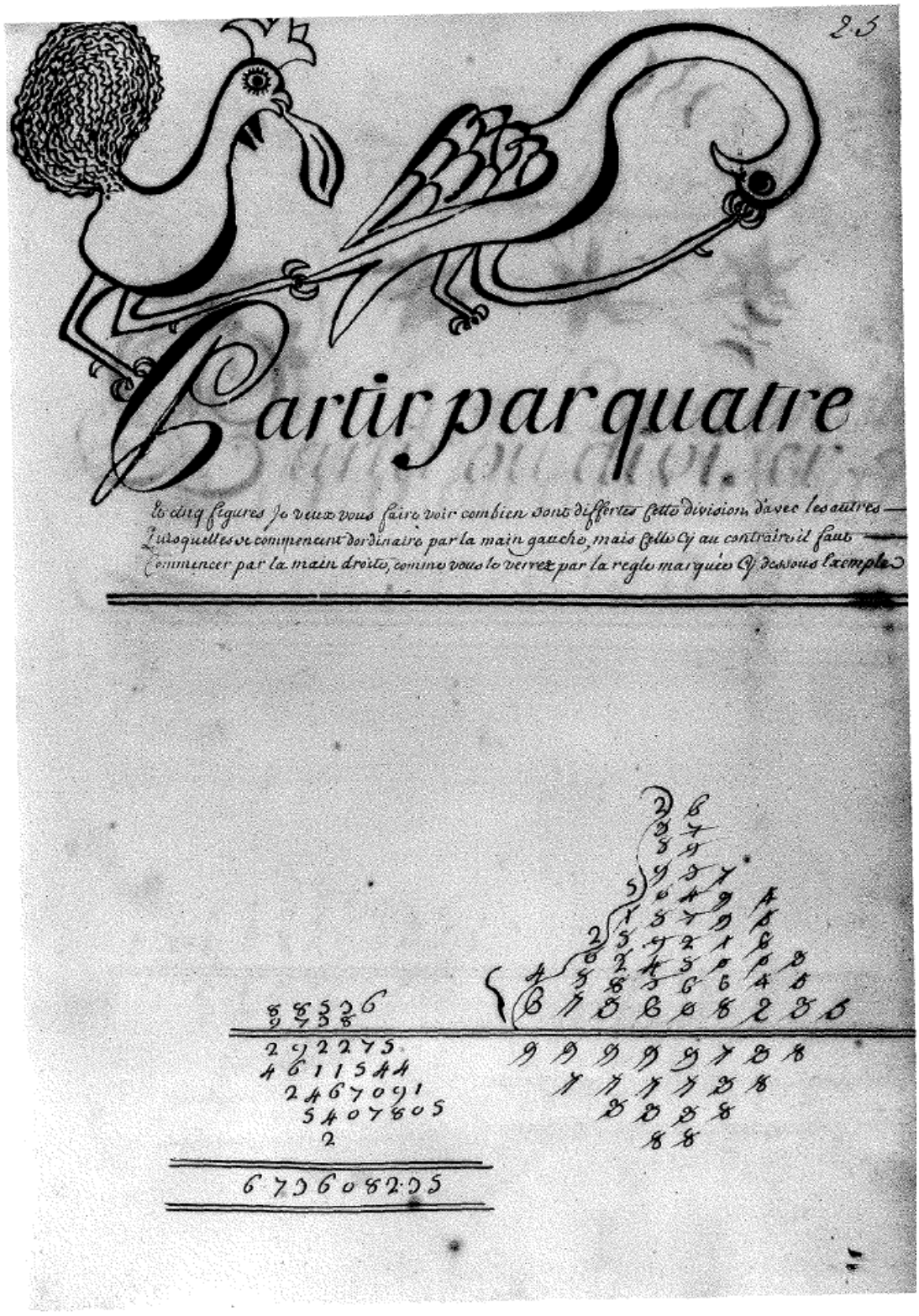
Avant la loi du 18 Germinal an III (7 avril 1795), loi sur le système métrique en France, on avait recours aux anciennes appellations qui n'avaient pas pour avantage d'uniformiser les mesures. Nous en avons ici un exemple. L'auteur essaie ici de définir la division, après avoir souligné le fait que c'est difficile à faire : le dividende est ici une somme, par exemple. La division par un diviseur à deux chiffres est considérée comme une procédure délicate.

2-1-2 Cahier d'arithmétique, (auteur inconnu, 1763)

Nous choisissons les illustrations de ce cahier issues des pages 19, 22,23, 25 *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)*.



Cahier d'arithmétique daté de 1763, page 23. Auteur inconnu 1.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan



Cahier d'arithmétique daté de 1763, page 25. Auteur inconnu 2.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

La définition qui apparaît ici reflète l'influence italienne de la dénomination "*partire*" qui veut dire "*diviser par*". Par ailleurs, nous constatons encore une fois que la preuve de la multiplication est systématiquement effectuée à côté des opérations. La définition de la division se restreint aux cas où le dividende est supérieur au diviseur :

"partition quatrième

régle generalle d'arithmétique: partager ou diviser c'est séparer un nombre à autant de parties égales qu'il y a d'unitez au diviseur, ou bien cest chercher combien de fois le diviseur est contenû ou nombre à diviser, pour eclaircir cette définition qui d'abord paraoit assez obscure aux commençans, il faut scavoir qu'en cette règle il y à trois nombres à distinguer; scavoir le dividande ou nombre à diviser, le diviseur ou nombre qui divise, le quotient ou resultat de la regle, exemple on donne à partager à 8 personne la somme de 24000 livres on demende la portion de chacunes."

Cette description de calcul suit une démarche qui suit les étapes décrites dans le livre de Barreme en 1788 (voir chapitre 2-1-3).

2-2 Analyse de cahiers d'élèves après la Convention

2-2-1 Cahier d'arithmétique de B.Bayle de la Javie (1815)

Rappelons que les divisions employées après l'adoption du système métrique dans les cahiers d'élèves, comme dans les manuels, sont représentées par notre algorithme actuel.

Nous retenons la page 54 et 55 du cahier de cet élève *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)*:

"Partager c'est employer en tables la somme de 959 ou a raison de 15 # 16 la charge, il demende combien on aura des charges

Exemple Réponse 606 charges"

Le calcul de la division suit sa preuve : la multiplication.

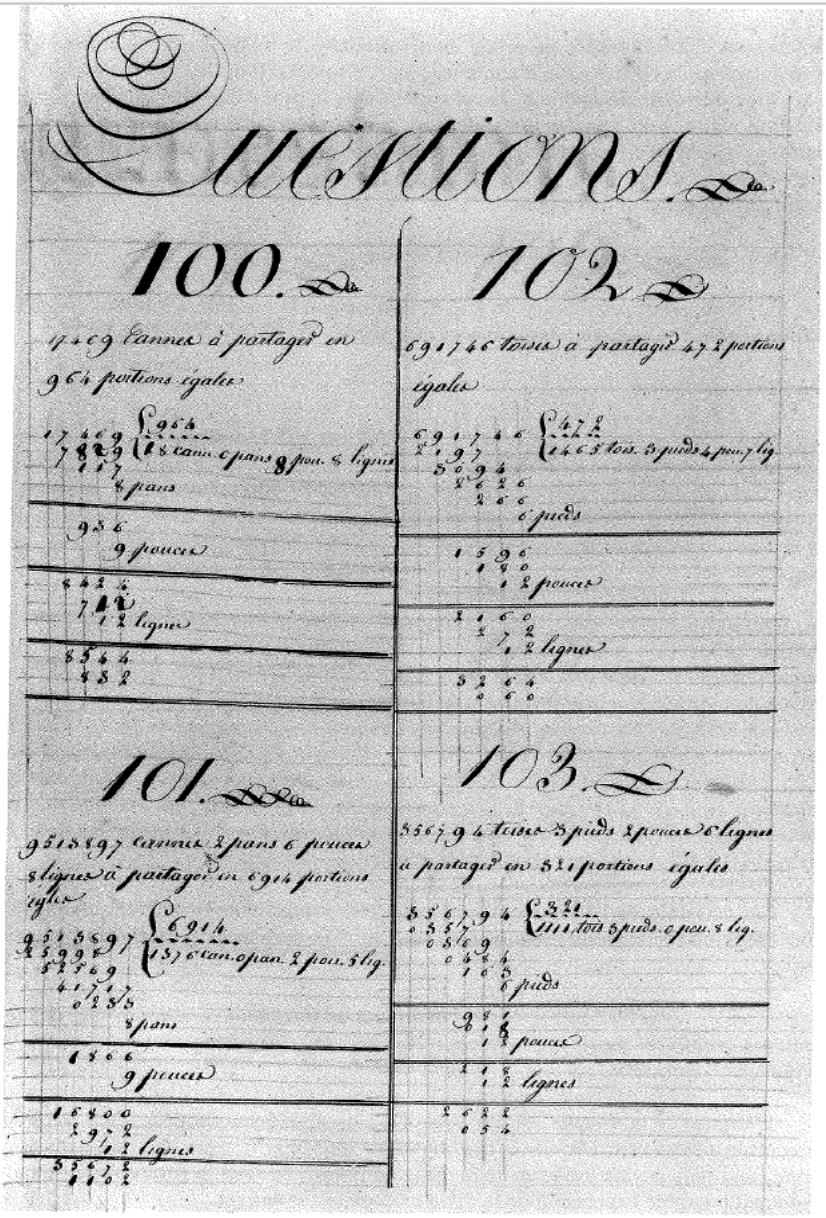
Cet extrait est assez représentatif de la définition du partage, maintes fois citée dans les manuscrits consultés.

2-2-2 Cahier d'arithmétique de G. Bonhoure (1820)

L'intérêt de cette illustration réside dans le fait que la virgule n'est pas encore utilisée, alors

que le système métrique a été adopté. C'est le cas dans plusieurs autres cahiers d'élèves que nous avons observés dans cette période. Ainsi, les restes des divisions sont successivement divisés en sous unités : respectivement des pieds ou pans, des pouces, ou des lignes. Les démarches révolutionnaires des leçons de Laplace sur les vertus du système métrique ne sont pas adoptées immédiatement. Par ailleurs, l'adoption de la technique actuelle de la division est rapide.

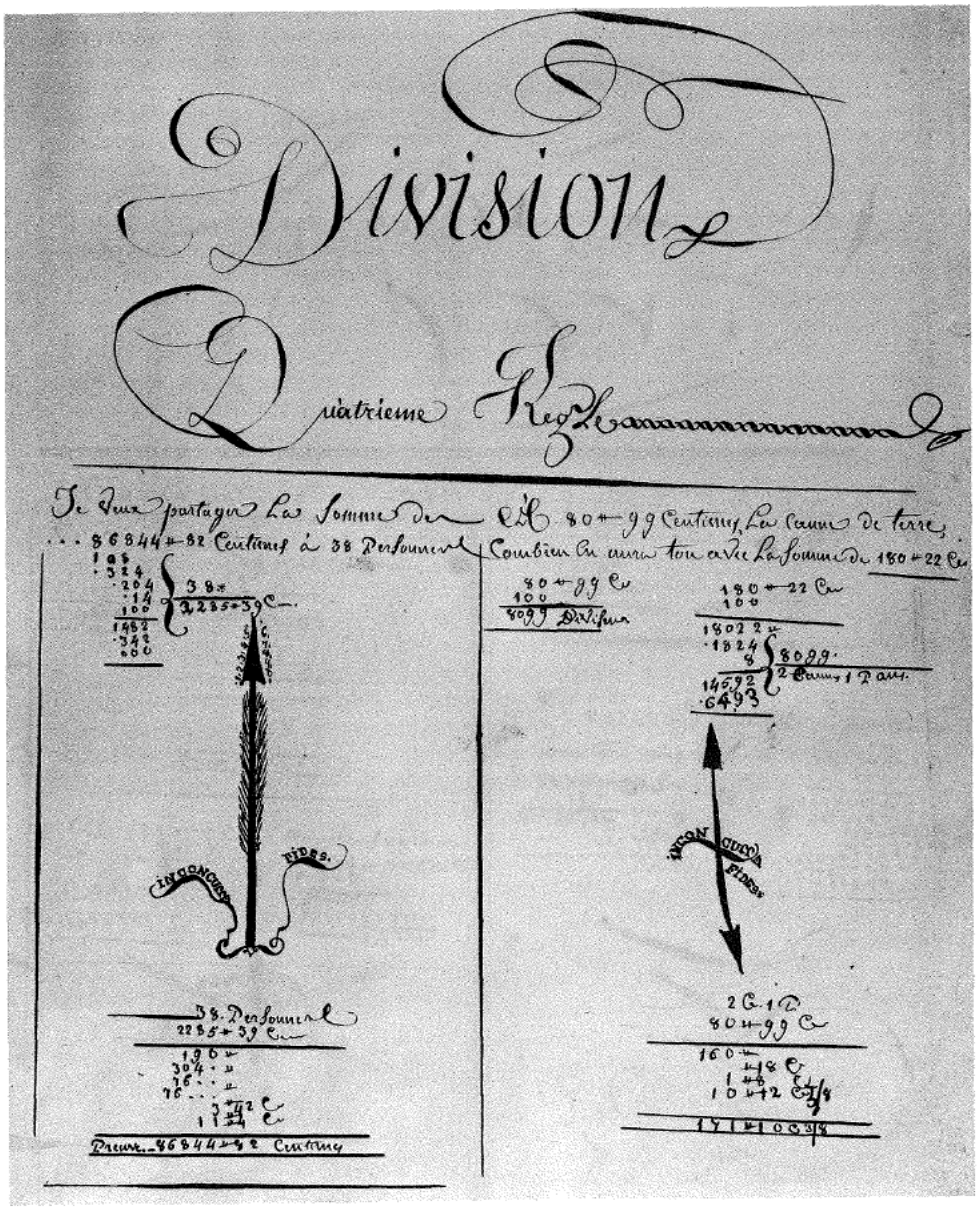
Quatre exercices numéros 100, 101, 102, 103 sont proposés *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)*.



Cahier d'arithmétique de Georges Bonhoure (vers 1820).
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

2-2-3 Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud (1828)

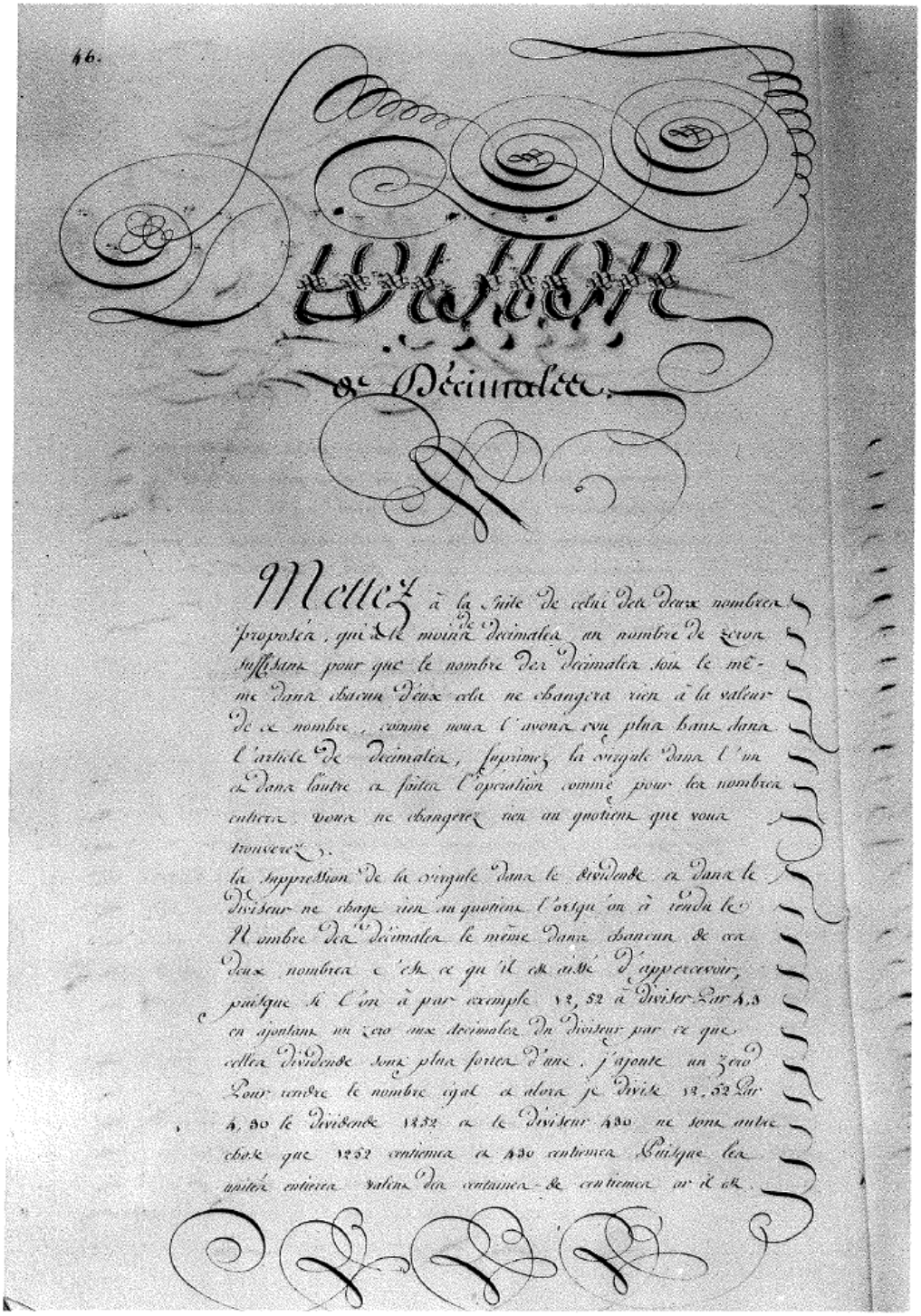
Remarquons l'hésitation liée au calcul du premier chiffre du quotient : le chiffre "3" est remplacé par le chiffre "2" (voir illustration page ci-dessous). Pour le calcul des chiffres de la partie décimale du quotient, la présentation de la procédure change : après avoir utilisé un calcul basé sur des soustractions non posées, l'élève écrit le chiffre 100, (signifie-t-il qu'il va effectuer un calcul au centième ?), puis évalue les deux décimales du quotient. Dès cette période, nous constatons dans ce document, ainsi que dans d'autres, l'utilisation de la virgule *(Source : Musée National de l'Education de Rouen)*.



Cahier d'arithmétique d'Antoine François Reynaud daté de 1828.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

2-2-4 Cahier d'arithmétique de Jean Labarthe (1855)

Les deux pages retenues (p.46 et p.47) expliquent la procédure à suivre quand le dividende et le diviseur sont des nombres décimaux .



Cahier d'arithmétique fait par Jean Labarthe, datée de 1855. Page 46.
I.N.R.P., Musée National de l'Education, Rouen - Mont-Saint-Aignan

"*Division à décimales*

Mettez à la suite de celui de deux nombres proposés qui à le moind de décimales un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun d'eux. Cela ne changera rien à la valeur de ce nombre, comme nous l'avons vu plus haut dans l'article de décimales, supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre et faites l'opération comme pour les nombres entiers, vous ne changerez rien au quotient que vous trouverez ».

La suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient lorsqu'on à rendu le nombre des décimales le même dans chancun de ces deux nombres c'est qu'il est aissé d'apercevoir, puisque si l'on a par exemple 12,52 à diviser par 4,3 en ejoutant un zéro aux décimales du diviseur parce que celles du dividende sont plus fortes d'un. J'ajoute un zéro pour rendre le nombre égal et alors je divise 12,52 par 4,30 le dividende 1252 et le diviseur 430 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes. Puisque les unités entières valent des centaines de centièmes or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes que 1252 unités ne contiennent que 430 unités. Dont la considération de la virgule est inutile quand on a complété le nombre des décimales."

Les divisions en colonne qui sont ensuite exposées dans ce cahier, suivent des procédures où les soustractions sont posées sous le dividende partiel. On peut lire aussi :

"Mais comme l'objet qu'on se propose quand on se sert de décimales est d'éviter les fractions ordinaires au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme d'une fraction, on continuera l'opération ..."

L'emploi de la virgule est ainsi justifié : on abandonne la procédure qui était préconisée jusqu'à cette période, et qui consiste à exprimer le reste de la division sous forme fractionnaire.

CONCLUSION

Nous avons choisi des extraits de manuscrits. Quand on parcourt les cahiers d'élèves ou les manuels dans leur intégralité, l'impression générale est celle d'exercices peu variés et répétitifs. De même, l'ensemble de ces écrits témoigne qu'on ne retient de la division que sa technique et le déroulement, au fur et à mesure de son utilisation. Il n'y a pas d'activités écrites de questionnement de conjecture, de contrôle (sauf exception faite pour le recours à la multiplication inverse). L'accent est ainsi mis sur la procédure seulement.

Parfois, les divisions sont précédées ou suivies d'une phrase d'introduction, qui sont des phrases du langage commun traduisant un résultat formalisé obtenu dans l'exercice, ou de

remarques qui soulignent certaines caractéristiques des exercices.

Notre étude fait abstraction, de l'utilisation présumée du manuel, et du rapport entre les exercices et les cours. On ne peut donc rendre compte des caractéristiques des pratiques individuelles des élèves, et de l'usage des exercices et de ce qui été présenté en cours en cours. Il nous semble cependant que l'on peut dégager quelques éléments de ce qui précède : le fonctionnement d'une division est traité d'abord comme une technique, et non pas comme un concept privant ainsi l'apprenant de tout point de repère susceptible de donner du sens à la technique.

A partir des exemples ci-dessus, on peut prévoir le genre de problèmes qui vont être mal posés ou mal résolus : le cas où le dividende d'une division est inférieur au diviseur par exemple. Les points de rupture ne sont plus les dates de découverte de l'algorithme, mais les types de conceptions véhiculés par le choix des exemples et des explications.

La résistance des obstacles du type "**on ne divise pas un nombre plus petit par un plus grand**", s'organise autour de ces conceptions. **Cette connaissance engendre aujourd'hui encore des erreurs (voir la partie expérimentale de notre recherche), et résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée.**

PARTIE THEORIQUE

PLAN : PARTIE THEORIQUE

CHAPITRE I : SOURCES DE LA RECHERCHE

CHAPITRE II : EPISTEMOLOGIE ET NOTION D'OBSTACLE

1 - De l'erreur à l'obstacle

2 - Notion d'obstacle

3 - La division comme ensemble de schèmes du sujet

CHAPITRE III : PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE LA PARTIE EMPIRIQUE

1 - Introduction

2 - Création des épreuves

3 - Problématique et hypothèses

3-1 - Problématique générale

3-2 - Hypothèses

4 - Méthodologie

4-1 - Présentation et genèse de l'épreuve

4-1-1 - L'analyse des similarités selon I.C. Lerman

4-1-2 - Implication entre variables et classes de variables

4-2 - Traitement informatique retenu et dépouillement

CHAPITRE IV : ANALYSE A PRIORI

PARTIE THEORIQUE

"Dans la reconnaissance de l'erreur (...) , le jugement n'a pas besoin de confronter une norme idéale et peut-être inaccessible à un état donné de la science, mais il interprète des rectifications, des raisonnements, des polémiques dans le champ limité d'une histoire que l'on peut souvent circonscrire." (B. Saint Sernin, Article "erreur", *Encyclopaedia Universalis*, VOL. 6, p.436)

CHAPITRE I : SOURCES DE LA RECHERCHE

Les analyses présentées dans cette thèse sont organisées autour de l'apprentissage de la division à l'école élémentaire et au début du Collège. Elles ont pour objet d'élargir le débat, et notamment de soulever des questions encore peu abordées à ce jour.

Nous nous attacherons ici à la technique de calcul, en remarquant que les démarches qu'elle comporte méconnaissent ou ignorent bien souvent les ressources et les caractéristiques du développement de l'enfant.

La division représente un algorithme puissant et complexe. Les erreurs sont d'abord vues comme résultant de l'écart à une méthode qui garantit l'obtention du résultat par le respect des règles de l'algorithme.

Les erreurs systématiques dans les tâches fortement algorithmisées comme les quatre opérations de l'arithmétique par exemple, sont en général définies comme des déviations par rapport à une méthode garantissant l'accomplissement correct d'une famille de tâches.

Les observations montrent pourtant que différents types d'erreurs existent, qui montrent qu'une certaine logique organise la suite des actions des élèves.

Brousseau établit une théorie des situations didactiques dans laquelle il distingue trois groupes : les élèves, les maîtres et les contenus de savoir.

Il faut ainsi s'interroger sur la nature et les caractéristiques de ce savoir. La question qui vient naturellement est alors : comment peut-on enseigner ? Les modalités par lesquelles on peut enseigner tel ou tel concept, tel ou tel algorithme, telle ou telle démarche, selon le niveau de développement des élèves, sont pour l'enseignant et le chercheur, une question fondamentale.

La division est un algorithme intéressant pour les calculs en colonnes, par exemple parce qu'il requiert en partie des calculs évaluables (celui du chiffre courant du quotient) ; le simple recours aux tables est insuffisant. Puis l'élève doit effectuer la multiplication du diviseur par le chiffre courant du quotient, la soustraction du produit partiel du dividende d'étape, l'addition des retenues impliquées dans ces calculs. En outre, la division suppose à partir d'un certain niveau la compréhension des décimaux.

Comme le soulignent Brun, Conne, Retchitzki, (1988) : "*La numération parlée opère de la même façon: en particulier dans l'opération de lecture d'un nombre écrit, il y a une évaluation de l'ordre de grandeur du nombre selon la longueur du symbole écrit. On retrouve une opération analogue dans la division au début du calcul, lorsqu'il faut décider du nombre de chiffres à "prendre" au début. Une autre évaluation encore, est celle de l'ordre de grandeur des produits partiels envisagés. Les autres étapes de l'algorithme se poursuivent comme pour les autres calculs en colonne. Ainsi, l'algorithme de la division opère une relation entre deux pans du domaine numérique qui, sans cela, ne seraient associés que lors des opérations d'écriture et de lecture des nombres*".

Quelles articulations les tâches conçues pour l'apprentissage de la division ont-elles entre elles, et quels matériels didactiques les actions et les représentations des élèves réclament-elles pour qu'ils comprennent cet algorithme ?

Notre projet consiste à saisir d'abord quelles connaissances sont effectivement induites chez les élèves. Nous supposons que l'enfant a des représentations diverses des différentes phases de l'algorithme. Nous essayons maintenant d'étudier les procédures qu'il utilise à partir du cours moyen première année, jusqu'en cinquième, plus particulièrement celles qui l'obligent à changer sa méthode ou ses conceptions.

Les enseignants, considèrent en général que les situations d'apprentissage mettent en jeu des connaissances des élèves déjà là. Partant de ce qui est négociable dans le nouveau qu'ils doivent introduire, ils élaborent des situations et des activités de mise en forme. Cette conjonction entre processus d'enseignement et conceptualisation, difficile à mettre en évidence, requiert des techniques visant à expliquer le sens, et des schémas didactiques appropriés. On ne peut demander aux maîtres de partir d'une situation d'action, de formulation, de preuve, sans leur en expliquer la fonction didactique pour les élèves.

Les enseignants travaillent sur l'apprentissage avec l'idée que les savoirs peuvent s'enseigner mais que la compréhension est à la charge de l'élève. Cette différence entre forme de l'enseignement et sens accordé par l'élève, fait qu'il est difficile de concevoir toutes les composantes nécessaires du processus. Il est difficile de donner un modèle du sens susceptible d'être négocié entre le maître et l'élève, et qui permette de faire travailler l'élève avec un vocabulaire et avec des concepts qui soient mathématiquement acceptables et qui l'aident à développer vraiment sa

connaissance.

Le travail que nous envisageons ne consiste pas à présenter toutes les découvertes que doivent faire les enfants dans l'apprentissage de la division, ni à proposer une solution didactique, seulement à analyser les procédures et les difficultés des élèves.

Le comportement d'un élève est fortement déterminé par le fait qu'il sait que l'on attend de lui les signes de l'apprentissage prévu. L'attitude de l'élève devient indépendante de la volonté d'enseigner du maître. Les stades génétiques de la pensée montrent qu'un enfant n'acquiert des connaissances que pour résoudre le conflit créé par la confrontation entre ce qu'on lui enseigne et le résultat de son propre travail cognitif : construction de nouveaux schèmes et modification de schèmes préexistants. Ceci est fondamental pour que la conduite de l'élève ait un sens mathématique identifiable par le maître.

L'élève a accès à un savoir qu'il peut en général maîtriser dans un certain contexte, en faisant appel à des repères qui dépendent largement du contrat didactique.

La description des formes de la vie scolaire est donc nécessaire, pour identifier les caractères de la situation qui influent sur la forme et la signification des comportements des élèves. Les variables de situation qui sont sous le contrôle du maître sont appelés par Brousseau les variables didactiques. Ces variables didactiques sont vues par lui comme le moyen de relier entre eux les savoirs anciennement acquis et les savoirs à acquérir.

La science est aujourd'hui pensée non comme un développement linéaire du savoir, mais comme un champ d'affrontements où les savoirs nouveaux s'imposent contre d'anciennes idées (cf Galilée, Einstein), et où les explications proposées ne sont pas censées rendre compte du réel tel qu'il est, mais des modélisations qui permettent d'en rendre compte (cf. Bachelard). Il en est de même pour l'apprentissage.

Les savoirs appris à l'école ne sont pas les savoirs savants. La notion de transposition didactique (développée par Chevallard, 1985), rend compte des processus sociaux qui font passer du savoir savant au savoir enseigné. Chevallard distingue plusieurs étapes comme autant de réécritures du texte du savoir. Parler de savoir savant à l'école est une illusion. Les rapports au savoir sont en outre très différents pour le maître et l'élève : l'un décide, l'autre pas, l'un programme, l'autre suit... En outre, l'élève et le maître ne sont pas soumis à la même temporalité : le professeur sait déjà et davantage ; l'élève, réorganise perpétuellement ses savoirs anciens en même temps qu'il s'en construit de nouveaux...

Tout algorithme est l'objet d'options épistémologiques, de présupposés didactiques qu'il faut analyser. Cette recherche fournit quelques exemples des variations de méthodes, au cours de ces méthodes quelques exemples des variations de sens, telles qu'on peut les saisir à travers l'histoire,

les procédures et les erreurs des élèves.

L'étude de la division à l'école élémentaire se réduit trop souvent à la mise en place d'une technique opératoire, et les situations concrètes utilisées servent tant bien que mal à justifier les différentes étapes du calcul. Il ne faut pas s'étonner que les élèves butent souvent sur la question préalable : dans ce problème, faut-il "faire une division" ? C'est la difficulté que les enseignants désignent sous le nom de "*sens de la division*". On croit trop souvent que la donnée d'une liste de mots-clefs (on "fait une division", quand on lit les mots : partage, division, répartition, distribution, etc.) suffit à régler la question. Une description aussi sommaire ne peut que manquer son objectif.

Le travail d'assimilation est évidemment essentiel pour tout apprentissage, et en particulier pour l'appropriation d'un algorithme. De lui dépend la construction par l'élève de tous les liens cognitifs que nécessite la maîtrise du calcul ; il assure aussi à l'élève l'élargissement progressif des tâches solubles par lui.

Songeons d'abord à l'introduction de l'algorithme lui-même. Il ne peut s'effectuer qu'à l'occasion de la présentation d'une série de tâches constituantes, choisies et ordonnées, de manière que soient articulées entre elles les opérations et les règles engagées dans l'algorithme. Par exemple, la disposition des nombres en colonnes, la place du quotient, l'ordre de grandeur du dividende et des dividendes partiels par rapport au diviseur, les soustractions en colonne, les retenues, les restes etc...

Traditionnellement, dans la population que nous avons observée, l'ordre d'acquisition des connaissances est le suivant :

-addition des nombres naturels,

-soustraction des nombres naturels,

-multiplication des nombres naturels,

-division des nombres naturels,

-même ordre ensuite pour les nombres décimaux.

La division comporte des traitements annexes qu'il faut pouvoir mener à bien, et qui résultent de la nécessité d'accommoder progressivement les données afin d'effectuer les traitements numériques élémentaires successifs :

-choix du nombre des chiffres du dividende à prendre en compte par rapport au nombre de chiffres du diviseur : il faut alors évaluer la valeur possible de chacun des différents chiffres du quotient. Il peut même être nécessaire d'évaluer l'ordre de grandeur de chacun des chiffres du quotient par

rapport à l'ordre de grandeur du dividende,

-multiplication du chiffre du quotient alors choisi par les différents chiffres du diviseur : unités, puis dizaines etc., pour l'obtention du produit partiel. Le calcul permet de trouver un produit partiel,

-soustraction en colonnes, de ce produit partiel du dividende d'étape ; le résultat est un reste partiel,

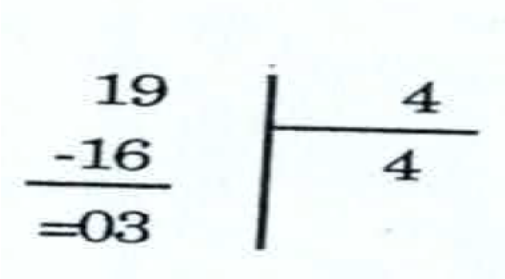
-"abaissement "d'un chiffre du dividende afin de poursuivre la division.

Ensuite, le calcul se poursuit par un nouveau cycle jusqu'à l'identification finale du quotient et du reste.

Dans l'arithmétique élémentaire, la division est un algorithme qui apparaît comme le plus intéressant des calculs en colonne, et le premier outil mathématique puissant, que les élèves ont à rencontrer après l'introduction de la numération écrite et de l'addition. Cet algorithme procède à la fois de gauche à droite, et de droite à gauche, contrairement aux autres algorithmes.

Ces deux sous-opérations de produit partiel et de soustraction partielle doivent être suffisamment maîtrisées par l'élève pour qu'il n'ait pas à recourir aux sur-notations (retenues) qu'il utiliserait dans une soustraction ou une multiplication isolée.

De plus, si on vérifie le résultat d'une division, par exemple 19 ÷ 4 = 4, on est amené à refaire les produits partiels déjà calculés dans la division : 4 x 4 = 16. Les soustractions sont effectuées en sens inverse par des additions de produits partiels.



vérification: (4 x 4) + ... = 19

d'où (4 x 4) + 3 = 19

Globalement, la division comporte donc des risques nombreux de confusion, d'autant plus grands que l'on fait alterner plusieurs types de traitement. Les traitements successifs des nombres sont des ajustements techniques qui n'ont pas tous une signification directe par rapport au concept de division. Ils opèrent en effet sur plusieurs plans :

-ordre de grandeur des nombres,

-technique opératoire de l'addition, de la soustraction, de la multiplication,

-calcul mental relatif à ces quatre opérations,

-coordination des écritures élémentaires dans le plan (disposition spatiale).

C'est à cause de sa place dans la division qu'il faut s'intéresser à l'étude de la soustraction : que devient-elle lorsqu'elle participe à un autre calcul qui l'englobe et qu'elle a une autre finalité que la soustraction habituelle ? Par exemple, les notations usuelles pour les retenues ne sont plus indiquées parce qu'elles surchargent l'écriture.

Ces différents aspects sont à considérer, avec leurs significations possibles pour les enfants. Les représentations des élèves, qu'elles soient spontanées ou qu'elles résultent de l'apprentissage et de conventions, sont dépendantes des conditions matérielles ou didactiques et des techniques de calcul dont ils disposent. Ces conditions et ces techniques varient donc au cours du développement de chaque élève.

CHAPITRE II : EPISTEMOLOGIE ET NOTION D'OBSTACLE

"Il ne peut y avoir erreur que là où il y a prétention à la vérité. Le lieu privilégié de l'erreur est donc la science... Il n'y a d'erreur que là où il y a jugement et donc décision ..." (B. Saint-Sernin, Encyclopaedia Universalis - erreur, vol. 6, p. 434)

1 - De l'erreur à l'obstacle

L'erreur tient une place importante dans notre système éducatif, marqué par la sanction de la note ou de la réprimande. Les analyses conduites dans les approches sociologiques, psychologiques ou disciplinaires débouchent parfois sur des propositions pour la rééducation. L'interprétation des erreurs se situe parfois en dehors des processus d'apprentissage.

Des travaux sont effectués, depuis quelques années, sur l'erreur considérée comme élément du processus didactique. L'idéal habituel pour un enseignant, c'est l'absence d'erreurs. Celles-ci d'ailleurs sont renvoyées à l'élève qui doit corriger, réapprendre en regardant la bonne solution et l'erreur est sanctionnée. Elle est donc interprétée en termes de mauvaise compréhension..., et non en termes de conceptualisation progressive. Cela ne correspond pas à l'attente de l'enseignant.

Les travaux sur l'épistémologie des sciences de Bachelard lui ont permis de dégager la notion d'obstacle et de souligner avec force que la connaissance scientifique se constitue souvent contre la connaissance commune immédiate et même contre une connaissance scientifique antérieure, (pp. 14-22, 1938).

Il notait que cette idée fondamentale s'applique aussi à l'enseignement :

"*Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. J'ai souvent été frappé du fait que les professeurs ne comprennent pas qu'on ne comprenne pas. Peu nombreux sont ceux qui ont creusé la psychologie de l'erreur...*" (p.19). Et il précise qu'il ne s'agit pas d'enseigner en répondant aux intérêts spontanés, mais qu'au contraire, il faut enseigner par un renversement systématique "*d'obstacles déjà amoncelés par la vie quotidienne*" (p.18).

Bachelard, dans une analyse de la notion de masse, a montré comment chacun des concepts auxquels nous sommes confrontés avait un "profil épistémologique", c'est-à-dire résultait de la présence simultanée en nous, et selon des proportions variables, de concepts distincts, cependant nommés au moyen d'un même nom. Dès lors, l'erreur naît de cette cohabitation inaperçue d'idées distinctes sous un même terme, dont ni la fonction pratique ni le statut théorique ne sont semblables. Il faudrait que notre conception du monde, notre phénoménologie, soit reprise par une phénoménotechnique, c'est-à-dire que l'opération intellectuelle de constitution d'un concept puisse

être confirmée, illustrée, reprise par des opérations techniques et symboliques de reconstitution des processus associés au concept. L'erreur ne peut être un désaccord entre des propositions théoriques et des faits d'expérience, puisque, justement, elle est détachée et de l'un et de l'autre.

Dans la même direction, Piaget a montré que le sujet apprenant passe par des phases d'équilibre et de déséquilibre, le processus d'équilibration correspondant à la recherche d'une solution optimale, compte-tenu des moyens dont il dispose à un moment donné par rapport à la situation. Dans le prolongement des travaux de Bachelard et de Piaget, on peut donc estimer que connaître, c'est d'abord avoir reconnu et rejeté des conceptions incorrectes. L'erreur se trouve donc ainsi placée au centre de la connaissance. Brousseau, chercheur en didactique des mathématiques, écrit : "*l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise, ces erreurs révèlent une manière de connaître. Elles apparaissent d'ailleurs jusqu'à un certain point comme reliées entre elles, comme organisées en systèmes*" (1989).

Des chercheurs tels que Amigues, Bishop, Brousseau, Schubauer-Leoni voient l'erreur comme une source d'informations importantes. Mme Salin, dans son mémoire de D.E.A. (1976), a émis l'hypothèse que les erreurs dépendaient de critères pédagogiques, et que les jugements des maîtres sur les erreurs semblaient dépendre des conceptions qu'ils avaient de la connaissance et de son apprentissage, ainsi que du rôle que jouait l'erreur dans ces conceptions.

Mme Milhaud, dans son mémoire de D.E.A. (1980), souligne qu'il existe une disproportion entre la grande variété des interprétations des erreurs que font, les maîtres et le petit nombre de décisions didactiques qu'ils déclarent appliquer à la suite de ces interprétations. Pour les maîtres, si constater une erreur, c'est effectivement identifier un dysfonctionnement, les réponses aux questions posées permettent de constater que les causes et les manifestations de celui-ci, ne sont pas toujours distinguées par les maîtres, qui de surcroît, n'ont pas une maîtrise suffisante du fonctionnement de l'élève en situation. Pourtant, ces maîtres semblent avoir constitué un éventail de traitements de l'erreur qui dépend de leur capacité à gérer les situations d'apprentissage.

Dans une perspective didactique, se pose alors à l'enseignant un double problème :

-Comment interpréter les erreurs des élèves ? Sur quoi nous renseignent-elles : sur le travail de l'élève, sur ses conceptions par rapport à la connaissance visée, sur la perception qu'il a des attentes du maître ?

-Quel comportement peut-on adopter face à ses erreurs ?

Brièvement, on peut construire une didactique prenant en compte les erreurs suivantes, souvent liées :

-Les erreurs de "savoir": l'élève ne connaît pas une définition, une règle, un théorème...;

-les erreurs de "savoir-faire": les techniques ou les algorithmes ne sont pas maîtrisés ;

-les erreurs liées à l'utilisation de ces savoirs et savoir-faire (avec l'hypothèse de la non-disponibilité de ces connaissances et de leur représentation : le contrat est souvent en cause).

Dans la perspective d'une situation classique d'interprétation didactique des réponses des élèves, il n'y a pas d'erreur tant qu'on ne réfère pas la réponse à une méthode de résolution donnée. Identifier une erreur, la relever, la reconnaître, c'est supposer que son producteur a bel et bien suivi la méthode de résolution, ou du moins a essayé.

La procédure de remédiation consiste alors à déterminer, selon une régression dans l'échelle de complexité, une tâche mieux adaptée aux capacités supposées de l'élève, et assurant soit son succès, soit l'occurrence d'une, voire d'erreurs plus aisément identifiables. En abordant l'étude des échecs scolaires et celle des situations didactiques, Brousseau, dans un article intitulé "Quelques conduites déterminantes en didactique des mathématiques" (I.R.E.M, Bordeaux, 1984) examine l'influence des difficultés ou des échecs dans des secteurs limités, échecs qu'il appelle électifs, par opposition à des échecs globaux ou dans des secteurs plus larges. Il pense que l'élève en échec électif échoue d'une façon différente sur des questions particulières. Il lui faudrait par conséquent des interventions elles aussi spécifiques ; on trouve chez lui des troubles relationnels plus importants que parmi les élèves en échec global.

Chaque connaissance s'acquiert lors de la prise de contrôle par l'élève d'une situation spécifique. Selon ce que ce contrôle exige de l'élève, la connaissance reçoit un sens plus ou moins correct... L'étude et la production de ces situations ont été les préoccupations du Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (C.O.R.E.M) de l'I.R.E.M. de Bordeaux situé à l'école Jules Michelet de Talence dont nous avons exploité certains résultats théoriques.

2 - Notion d'obstacle

Sans épistémologie, on ne peut différencier les connaissances périmées des connaissances sanctionnées, c'est à dire encore actuelles parce qu'opératoires.

C'est Bachelard qui a opposé l'histoire périmée à l'histoire sanctionnée, et à l'histoire des faits d'expérimentation ou de conceptualisation scientifiques appréciés dans leur rapport aux valeurs scientifiques fraîches. La thèse de Bachelard a trouvé son application et son illustration dans maints chapitres de ses ouvrages d'épistémologie.

En évoquant l'image de l'école ou du tribunal pour caractériser la fonction et le sens d'une histoire des sciences qui ne s'interdit pas de porter des jugements de valeur scientifique, il convient d'éviter une méprise possible : un jugement n'est pas une purge ni une exécution. L'histoire des

sciences n'est pas le progrès des sciences renversées, c'est-à-dire la mise en perspective d'étapes dépassées dont la vérité d'aujourd'hui serait le point de fuite. Elle est un effort pour rechercher et faire comprendre dans quelle mesure des notions ou des attitudes ou des méthodes dépassées ont été à leur époque un dépassement, et par conséquent en quoi le passé reste le passé d'une activité à laquelle il faut conserver le nom scientifique. C'est ainsi que l'étude de l'évolution de l'algorithme de la division nous paraît être intéressante.

"*Les mathématiques sont un devenir*" dit Jean Cavaillès (La pensée mathématique in "Bulletin de la société française de philosophie," 1946, 1, p.8). Dans ces conditions, l'historien des mathématiques ne peut tenir que du mathématicien d'aujourd'hui la définition provisoire de ce qui est mathématique. De ce fait, bien des travaux autrefois intéressants au regard des mathématiques perdent aujourd'hui leur intérêt mathématique, et deviennent triviaux au regard d'une nouvelle rigueur des applications.

Dans un savoir cohérent, un concept a rapport avec tous les autres, et c'est bien ce qui nous intéresse dans notre étude.

Dès le chapitre premier de la formation de l'esprit scientifique de Bachelard, nous apprenons que la racine des erreurs doit être cherchée dans la connaissance elle-même et non hors d'elle. Ce que l'esprit scientifique doit surmonter fait obstacle dans l'esprit même. L'existence d'obstacles épistémologiques rend différentes les tâches de l'épistémologue et de l'historien des sciences : son intérêt se porte sur les erreurs, les "horreurs", les désordres, tout ce qui représente la frange de l'histoire, non recouverte par l'épistémologie historique.

Selon Bachelard, l'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensée, tandis que l'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. Bachelard a eu d'abord conscience des ruptures épistémologiques. C'est ensuite qu'il a élaboré les concepts philosophiques aptes à en rendre compte. Cette élaboration l'a conduit à proposer une conception des rapports entre science et histoire de la science qui constituait, elle aussi, une rupture : une conception non positiviste, (le positivisme se fonde sur une loi des trois états qui est une loi de progrès, c'est-à-dire, selon A. Comte, de développement continu dont la fin est au commencement).

Si l'on s'efforce de suivre l'épistémologie de Bachelard pour l'étude de l'algorithme de la division, on doit pouvoir avancer que cet algorithme, parvenu à maturité, avec sa présentation "en arbre" massivement reconnue, constitue à la fois un lien et une coupure entre la forme archaïque des siècles précédents (voir chapitre sur l'origine de l'algorithme), et des présentations éventuelles à venir: ne peut-on par exemple envisager une autre présentation de l'algorithme (comme l'ont fait l'équipe d'enseignants et Brousseau à l'école Michelet de Talence), ou adopter un langage plus compréhensible dans sa présentation à l'école.

C'est par une étude des procédés spontanés de création et de gestion du sens, qu'ils séparent l'apprentissage de l'algorithme de celui du sens, ou qu'ils les intègrent dans un même processus, que nous estimons possible d'obtenir des informations plus précises sur les différentes conceptions des élèves, et sur la façon dont les obstacles fonctionnent. La notion d'obstacle se manifeste par des erreurs ; mais les obstacles sont constitués de connaissances avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des ramifications imprévues ; ces connaissances résistent au rejet et tentent de s'adapter. Le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place de la connaissance.

L'origine des obstacles est de trois ordres :

-d'origine psychogénétique (théorie de Piaget), avec les contraintes dues au développement de l'enfant.

-d'origine didactique, donc liés aux choix des enseignants,

-d'origine épistémologique, lorsqu'ils ont joué (et jouent encore), un rôle dans la construction de la connaissance (Bachelard).

2-3 La division comme ensemble de schèmes du sujet

La connaissance est une adaptation. Les concepts sont des réponses pratiques et théoriques à des questions que l'on se pose. Quand l'enfant est confronté à des situations de division, le problème est de savoir ce que représente ce concept. Une situation ne s'analyse généralement pas avec un seul concept et dans un seul type de situation. L'idée de prendre pour objet d'étude la division comme ensemble de situations et de concepts en est issue.

La définition ci-dessus permet de conduire, dans le répertoire des compétences et des conceptions du sujet, des analyses significatives du point de vue de l'apprentissage et du développement cognitif, notamment parce qu'on peut y repérer des niveaux différents de connaissance, des filiations, des ruptures. La source des concepts est à rechercher dans les invariants opératoires, et par conséquent dans les schèmes, et ceci dans le cadre de la totalité dynamique fonctionnelle dans laquelle ils s'inscrivent.

La notion de schème vient de Kant, mais elle a été développée par Piaget. Dans une perspective Vygotskienne, la science est l'adaptation aux situations. Le schème comporte des buts et des instruments de sélection des informations avec des règles d'action et des invariants opératoires, c'est-à-dire des théorèmes et des concepts en acte. Une opération mathématique comme la division ne peut pas s'analyser toute seule. Par le symbolisme ou l'analyse temporelle de la situation, on peut exprimer un théorème en acte qu'on ne pourrait pas énoncer de façon naturelle. Le concept cognitif de base est le concept de schème. On a besoin du schème pour analyser

l'organisation des conduites du sujet en situation. Il faut aussi faire sa place en didactique à la variété des situations.

Le schème de la division analyse les connaissances en acte nécessaires à l'algorithme. Il permet de définir :

-la nature des erreurs et si elles font système ;

-les connaissances que représente cette organisation ;

-les règles associées à ces connaissances ;

-les inférences qu'autorise cette organisation.

Effectuer une division est une véritable connaissance en acte, et non la simple application de règles conventionnelles classées et ordonnées. C'est ainsi que nous distinguons les concepts de schème et d'algorithme. Pour l'analyse des connaissances en acte nécessaires à l'efficacité de l'action, Vergnaud (1990), parle du concept de schème comme d'une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données reposant sur une conceptualisation implicite. Cette théorie répond à une théorie de la conceptualisation avec une vision épistémologique. Les enfants inventent ou adoptent une interprétation en lui attribuant une certaine cohérence.

Un champ conceptuel (Vergnaud, 1990), est de manière indissociable un ensemble de situations et de concepts. Il faut les deux choses à la fois. S'il n'y a pas d'invariants opératoires, et de représentation implicite du réel, cette relation n'est pas envisageable. Ce qui est combinable ou dé-combinable, ce sont les objets, les relations, les propriétés, et les relations : la conceptualisation est ainsi au centre du cognitif.

L'algorithme de la division est une suite finie de règles d'action. Cette suite d'opérations toujours identiques représente pour l'élève un travail dont il ne connaît pas la signification et qu'il ne veut pas modifier. Un algorithme, en effet, a des propriétés de généralité et d'effectivité. Ce qui nous intéresse, c'est de comprendre comment il révèle ses insuffisances lorsque la complexité de la division s'accroît. La division nous offre un exemple d'analyse en termes de schème et de concept, par l'identification et l'analyse des invariants sous-jacents au fonctionnement des schèmes. Le répertoire des schèmes est contenu dans l'ensemble des connaissances du sujet. Ce processus d'adaptation consiste en découvertes, combinaisons, décombinaisons et recombinaisons. Face à une difficulté, l'enfant invente, et tente de réparer sa procédure défaillante. Chaque pas de l'algorithme représente une nouvelle situation de calcul. C'est la mise en relation des différentes étapes qui permet de comprendre les procédures des élèves.

Dans notre étude, nous voulons souligner l'importance des occasions d'erreur que nous retrouvons chez nos sujets, et dans quelles circonstances elles se produisent. Si par exemple, à un

moment donné, la procédure requiert de prendre deux chiffres au lieu d'un au dividende, ou de trouver quelque chose qui sera un zéro au quotient, ou d'abaisser des zéros, cela permet par extension de définir les cas d'erreur, et ceci précisément dans une même occasion. En effet, ce n'est pas le même schème qui génère des erreurs ; la réparation apportée par le sujet n'est pas la même, et se modifie selon les situations. Bien que le couple dividende et diviseur suffise normalement à dessiner les occasions d'erreur, le fait par exemple que ce soit au quotient que se situent les difficultés les plus grandes pour les élèves, montre que le contrôle du sujet opère à partir du quotient. L'attention de l'élève se centre donc en partie sur le résultat qui a du sens pour lui, c'est à dire que le schème comporte des anticipations. Sur un plan théorique, on voit que le concept de schème apporte un grand éclairage.

Vergnaud donne d'autres exemples de schèmes, pour d'autres domaines de compétence : la danse, ou une certaine façon de danser, le saut en longueur, ou la manière d'effectuer ce saut, l'argumentation d'un avocat lors d'une plaidoirie. Dans tous ces cas, on peut mettre en évidence une organisation invariante, consistant en règles, anticipations et invariants opératoires.

Ce qui est en jeu dans l'algorithme de la division, c'est ce qui porte à la fois sur les signifiants et les signifiés, c'est à dire sur la décomposition polynomiale des nombres en centaines, milliers, etc... Au-delà de la notion de script-algorithme, c'est sa transformation en script-schème (ou schème tout simplement) qui permet de mesurer la compatibilité de ce à quoi le sujet arrive, avec ce qu'il attend. Les anticipations que le sujet effectue sont ainsi analysables à partir d'observations de certaines occasions d'erreur et des schèmes existants.

Des travaux récents, (Brun, Conne, Lemoyne, 1992) ont accordé à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud une place centrale, et ont montré l'importance du concept de schème grâce à une étude visant, elle aussi, à l'analyse d'erreurs observées dans des tâches demandant la mise en oeuvre d'algorithmes de calcul. Pour nous, le schème n'échappe pas à la contingence de l'action du sujet en situation, ce qui entraîne l'évolution des conceptualisations. Le schème doit et peut s'adapter aux circonstances. La question de savoir si "le caractère automatisé de l'algorithme est compatible avec le caractère dynamique du schème", ne nous paraît être une question pertinente au regard de la différence entre ces deux concepts. Un algorithme accomplit une suite d'opérations qui, rappelons-le accomplit un travail dont on ne connaît pas nécessairement la signification et qu'on ne doit pas modifier, c'est souvent cette fonction qui est requise de l'apprenant. Or, le schème qui organise, quant à lui, la conduite du sujet, dépend directement du fonctionnement cognitif du sujet et repose sur les invariants opératoires. La mise en oeuvre de l'algorithme, conduit déjà à parler de schèmes, c'est ainsi que nous nous posons la question de la compatibilité de deux choses appartenant à la fois au même registre et à des registres différents. **Les algorithmes sont des schèmes, mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes**. A notre question "l'algorithme de la division est-il un algorithme ?", nous répondons que l'ensemble des opérations associées à cet algorithme, appelle directement la représentation que le sujet leur confère, et par conséquent le concept de schème. L'effectivité de l'algorithme, propriété d'aboutir en un nombre fini de pas, est

compatible avec la notion de schème. Les erreurs de calcul écrits ne doivent pas être considérés seulement comme "des écarts à l'algorithme enseigné", mais comme des schèmes résultant des accommodations du sujet, aux situations données. Le schème relève d'une logique de l'adaptation qui n'est pas celle de l'algorithme.

L'effectivité de l'algorithme de la division repose sur la relation de nécessité qui relie les caractéristiques de la situation et celles de la procédure. Par exemple, la division avec reste, repose sur la décomposition polynomiale des nombres, mais il est plus facile d'en retenir les règles que les raisons d'existence. L'élève n'est pas en mesure de prouver la validité des règles utilisées. Une certaine contingence liée à l'apprentissage, montre cependant certaines régularités. Les glissements qui s'opèrent sont liés au fait que le sujet, ne connaissant pas les règles utilisées devant un cas mal mémorisé, reconduit ce qu'il en a compris, ce qui le conduit à l'erreur. C'est ainsi qu'on peut parler de la contamination ou de la dégénérescence d'un algorithme.

La suite d'opérations que comporte une division, est souvent effectuée sans que le sujet comprenne les raisons de ce qu'il fait. Ceci soulève le paradoxe suivant : on a besoin de se représenter les choses, mais sans avoir nécessairement besoin de tout savoir sur les raisons de la suite des actions à faire. Avec la répétition, on arrive à apprendre certaines choses : les conditions d'une certaine automatisation sont alors réunies. L'algorithme, lorsqu'il se raffine pour traiter des situations particulières, zéros intercalaires ou terminaux aux dividendes, diviseurs, ou quotients par exemple, va engendrer des actions spécifiques. Les procédures dégénérescentes sont la preuve que l'algorithme n'est pas acquis. Nous nous posons alors deux questions :

-Quelles sont les occasions d'erreur qui font déraper le sujet ?

-Quelles sont les circonstances dans lesquelles certaines classes de situations sont mal délimitées ?

Le fonctionnement cognitif d'un sujet part d'un ensemble de schèmes disponibles. L'enfant reconnaît ainsi des analogies entre ce qu'il connaît déjà et ce qu'il découvre. La reconnaissance de ces invariants permet la généralisation du schème. Les travaux de Brown et Van Lehn (1980), mettent en évidence les cas d'erreurs systématiques et leur caractère particulièrement organisé. A partir de leurs travaux sur l'algorithme de la soustraction, ils ont développé une théorie qu'ils appellent "Repair Theory". L'élève procède à une "réparation" de ces schèmes afin d'obtenir un résultat ; son problème étant de conduire son calcul jusqu'à la fin. Dans l'exposé fait au colloque "Vingt ans de didactique des mathématiques" (1993), Brun et Conne développent et illustrent le fait que les modèles des erreurs, s'ils veulent être fidèles, doivent rendre compte du fait qu'elles résultent d'anticipations et d'inférences faites par le sujet. Les erreurs sont pour eux, des formes provisoires et éventuellement durables de ce schème en construction.

CHAPITRE III : PROBLEMATIQUE

ET METHODOLOGIE DE LA PARTIE EMPIRIQUE

"*Tout fait nombre, dit l'homme en prenant son butin*" (La Fontaine).

1 – INTRODUCTION

Notre travail concerne la compréhension de la technique de la division et l'apprentissage de l'algorithme. Dans les situations de classe, les erreurs sont considérées par les enseignants comme des écarts à l'algorithme enseigné. Notre objectif est d'analyser ces erreurs afin d'en repérer les caractéristiques cognitives. Pour cela nous considérons la production de l'élève comme un tout organisé et dynamique qui renvoie au cadre interprétatif implicite avec lequel celui-ci conduit son calcul dans différentes conditions.

Notre choix concerne la gestion par les élèves de la technique opératoire de la division, et par conséquent les erreurs observables dans les manipulations. Notre intérêt est centré alors sur les "ruptures" prévisibles, en fonction des caractéristiques des divisions proposées. Nous étudions la manière dont les élèves procèdent dans leurs calculs au fur et à mesure de leur déroulement et comment ils improvisent, éventuellement, des "réglages" personnels en fonction des difficultés rencontrées. On cherche à localiser l'étape à laquelle l'erreur a été commise afin de l'interpréter.

L'enseignant a des difficultés à repérer et identifier le type d'erreurs commises par les élèves et à formuler des hypothèses sur leurs conceptions, aussi bien d'ailleurs qu'à construire des situations qui permettraient l'émergence des bonnes procédures et la déstabilisation des procédures erronées. L'élève, pour sa part, a des difficultés à comprendre le sens et la résolution de la division et à articuler correctement entre elles, les différentes sous-procédures en jeu dans cette opération. L'étude présentée ici vise à déterminer l'origine et la nature des erreurs les plus fréquentes, afin d'analyser les procédures utilisées par les élèves mis en situation d'effectuer des divisions. Nous étudions comment les élèves s'approprient ce schème-algorithme et comment évoluent les significations relatives au sens des différentes étapes.

Il nous faut déterminer en quoi le choix des différentes divisions permet d'analyser les processus des élèves, et de comprendre le sens qu'ils attribuent à ces opérations.

Notre analyse a priori ne concerne pas l'enseignant. Nous nous contentons de décrire et d'analyser le sens que l'élève attribue à la division. Nous faisons l'économie du jeu de l'enseignant avec ses élèves ainsi que des ruptures de contrat. Dans notre situation expérimentale, en effet, une part des processus didactiques nous échappe. Dans un contexte proprement didactique, les erreurs

liées à l'exécution de l'algorithme n'épuisent pas l'ensemble des erreurs observées.

Nous avons choisi trois méthodes d'analyse statistique :

- Classification hiérarchique (selon Lerman),

- Classification implicative (selon Gras et Larher),

- Analyse factorielle des correspondances multiples,

afin d'identifier les relations entre les grandes classes de comportements erronés.

La classification implicative est une méthode élaborée et développée par Gras dans sa thèse (1979), et étendue en 1992 par A. Larher . Elle permet d'établir des relations implicatives, et d'émettre des conjectures du genre : la réussite à une division s'accompagne-t-elle nécessairement de la réussite à une autre division, et une erreur donnée implique-t-elle une autre erreur ?

Avec ce type d'analyse, beaucoup d'erreurs sont ainsi identifiées comme des combinaisons originales de connaissances et de règles, qui s'enchaînent. Effectuer une division repose sur de véritables connaissances en acte, et non sur la simple application de règles conventionnelles classées et ordonnées. Pour analyser les connaissances en acte nécessaires à l'efficacité de l'algorithme, nous utiliserons le concept de schème défini comme "organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données, et les concepts d'invariant opératoire et de conceptualisation implicite (Vergnaud, 1981, 1985, 1990).

Les relations, rencontrées par les élèves dans des problèmes de multiplication et de division, ainsi que l'aspect interactif de ces concepts dans l'évolution de l'élève, nous conduisent à étudier l'apprentissage de la division dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, qui pose que concepts et procédures sont en étroite connexion. Essayer de comprendre, c'est établir des liens entre des connaissances ou des phénomènes grâce au jeu interactif entre son expérience personnelle du domaine hors de l'école ou sa classe. Certaines connaissances sont institutionnalisées par l'enseignant, et sont définies, par lui, comme adéquates, pour atteindre l'objectif visé. Les conceptions fausses persistent cependant parce qu'elles sont rattachées à une certaine façon des élèves de comprendre les propriétés des nombres et des relations sur lesquelles porte la technique opératoire. Ainsi notre étude devra-t-elle être attentive aux obstacles que sont les instruments personnels de compréhension de l'élève.

Notre étude des difficultés des élèves dans l'utilisation de la division, montre un certain échec de ce que les enseignants pensent pourtant évaluer le mieux : les algorithmes. Les processus algorithmiques paraissent plus aisément identifiables et les erreurs sont vues comme la non-observation des règles de l'algorithme. Nous verrons que ces erreurs sont aussi conceptuelles. L'objet de la partie empirique de la recherche est de repérer les principaux glissements de sens

auxquels se prête l'algorithme afin d'en comprendre mieux les ressorts.

2 - Création des épreuves - Objectif général

Notre premier objectif a été de déterminer un choix de divisions permettant d'analyser les comportements et les interprétations des élèves, et le sens qu'ils attribuent à ces opérations. Les erreurs ont une valeur prédictive et on peut penser qu'elles décrivent correctement, au moins en partie, les processus mis en jeu par les élèves ; elles fournissent ainsi des pistes pour l'interprétation et l'usage que les élèves se donnent des règles qui leur ont été enseignées. Nous avons recueilli des observations sur un échantillon de 28 divisions auprès des élèves de quatre niveaux scolaires C.M.1, C.M.2, sixième, cinquième), ce qui nous a donné une variété d'erreurs qu'il nous a fallu ensuite analyser, afin d'en repérer les caractéristiques cognitives.

Grâce aux méthodes statistiques utilisées, nous pouvons regrouper ces erreurs en classes lorsqu'elles admettent entre elles une similarité ou une certaine "cohésion". Ensuite nous recherchons les implications éventuelles entre les variables retenues (réussite, erreurs de différents types etc…), de manière à préciser certaines hypothèses concernant les procédures erronées, et à dégager des types généraux de comportements.

Les hiérarchies implicatives obtenues permettent de mieux comprendre le sens des procédures des élèves. D'après Gras (1992), la comparaison des résultats de l'analyse implicative avec ceux obtenus par les méthodes classiques d'analyses de données, nous convainc de l'originalité de cette méthode pour analyser les liaisons dissymétriques et la hiérarchie des classes qu'elle fait émerger. Cette technique est synthétique. Elle est fondée sur le concept de cohésion (au sein des différentes classes de variables) et sur celui d'entropie, et aboutit à des indices d'implications entre classes. Les questions concernant la complexité progressive des conduites, peuvent y trouver réponse.

La description des erreurs est assez simple, selon la présence ou l'absence des éléments suivants :

-division avec reste ou non, avec quotient décimal ou non,

-position de la virgule au quotient,

-rôle du zéro au dividende, au diviseur ou au quotient,

-soustraction posée ou non,

-ordre de grandeur relatif du dividende et du diviseur, du dividende d'étape et du diviseur.

Nous verrons plus loin que chacun de ces éléments se décompose en éléments plus fins, qui

pèsent d'un poids inégal dans les difficultés des élèves.

3 - Problématique et hypothèses

3-1 Problématique générale

Le découpage des connaissances à enseigner correspond à une idée d'accumulation des connaissances. On réactive souvent d'anciennes connaissances sur lesquelles on s'appuie dans les mêmes termes, sans remettre en cause les acquisitions antérieures. Cet aspect cumulatif peut s'opposer à la mise en place de certains concepts. Bachelard a mis en évidence la notion d'obstacle épistémologique au cours du développement de la connaissance scientifique en physique.

L'erreur est presque toujours première et ne peut pas être analysée simplement comme l'échec d'une conception : celle dispensée dans les écoles, d'abord jugée conforme à la réalité, et que les enseignants rectifient si elle conduit à l'échec (nous le constatons auprès des instituteurs et professeurs interrogés). Le concept de division dans l'enseignement élémentaire se fige dans un mode de description ou de désignation d'un ensemble d'opérations qui restent presque totalement opaques à l'entendement des élèves. Par exemple, on leur propose souvent une forme de résolution difficile, lorsque la soustraction n'est pas posée.

Brousseau a mis en évidence l'intérêt pour la didactique de la notion d'obstacle épistémologique dans un article paru en 1983 ("Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques", dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques) : "*La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité, et aussi un domaine où elle est a priori pertinente où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs*". Pour lui, un obstacle se manifeste par des erreurs qui ne sont pas dues au hasard. En particulier, au niveau de l'ordre de grandeur initial, il peut y avoir obstacle pour toute la résolution de l'opération.

Brousseau, dans le même article ajoute que : "*L'obstacle est constitué comme une connaissance (...). Il va résister au rejet, il tentera de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit suivant un processus d'accommodation bien connu. Le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance*".

L'idée que l'apprentissage antérieur des élèves puisse faire obstacle à la mise en place des connaissances nouvelles est un des points d'appui de notre analyse des difficultés des élèves.

Par ailleurs, le découpage du savoir amène à un certain cloisonnement entre différents aspects d'un même domaine, tels que l'apprentissage de la multiplication et de la division. Ainsi Vergnaud propose-t-il de prendre en compte les relations entre différents concepts, de manière à

découper les contenus de connaissance en objets d'étude assez larges, par la définition de champs conceptuels dans lesquels les concepts et les procédures sont en étroite connexion: "*Il serait aberrant de conduire des études séparées sur l'acquisition des concepts de multiplication et de division, de fraction, de rapport et de nombre rationnel, de fonction linéaire et n-linéaire, d'analyse dimensionnelle et d'espace vectoriel, puisque dès les premiers problèmes de type multiplicatif qu'il rencontre (proportions, surfaces, volumes), l'enfant est confronté à des relations qui relèvent de l'ensemble de ces concepts*" (Vergnaud, 1981).

La question que nous nous posons alors, est de savoir si on donne aux élèves qui font beaucoup d'erreurs, l'occasion de construire le sens des notions qu'on veut qu'ils apprennent. La didactique doit pouvoir formuler et avancer des hypothèses correspondant à ces questions.

3-2 Hypothèses

Les réponses inadéquates doivent être rapportées aux tâches techniques et aux raisonnements qu'elles supposent. C'est ainsi qu'on peut observer des erreurs systématiques qui rendent ardue et hypothétique la remédiation par le simple rappel de la règle à suivre. Ceci nous conduit à mettre en cause les analyses trop naïves. Nous les aborderons plus loin avec le concept de schème.

La valeur prédictive des erreurs demande que celles-ci décrivent au moins en partie, les processus mis en jeu par les élèves et fournissent des pistes pour l'interprétation que ceux-ci se donnent des règles qui leur ont été enseignées. Nous avons recueilli des calculs sur des opérations écrites de 28 divisions auprès de 4 niveaux de classes (cours moyen première année, cours moyen deuxième année, sixième, cinquième), ce qui nous a donné une grande variété d'erreurs.

La description des erreurs est faite assez simplement, selon la présence ou l'absence d'erreur et de contrôle des opérations dans les cas suivants :

-division avec reste ou non,

-algorithme comprenant la pose de la soustraction ou non,

-nombre de chiffres à prendre en compte au dividende pour effectuer l'opération, par rapport au nombre de chiffres du diviseur,

-position de la virgule au quotient,

-rôle du zéro au dividende, au diviseur ou au quotient.

L'ensemble des erreurs (et des relations dissymétriques entre elles) recueillies grâce aux méthodes d'analyse de données telles l'analyse hiérarchique, l'analyse implicative et l'analyse

factorielle de données doit nous permettre d'étayer une vision différenciée des problèmes rencontrés par les élèves.

4 - Méthodologie

4-1 - Présentation et genèse de l'épreuve

Dans cette recherche, les outils statistiques jouent un rôle essentiel pour mettre en évidence les procédures mises en oeuvre par des élèves. Certains de ces outils sont relativement connus, comme la classification hiérarchique et l'analyse des correspondances. L'analyse implicative est moins connue : elle fournit une image des implications entre variables et classes de variables, et est développée au départ dans la thèse de Gras, 1979). La démarche de R. Gras s'inspire des démarches générales utilisées par Lerman (1981) pour le calcul de son indice de proximité. Elle est exposée dans un article de Gras, Lerman et Rostam (1981).

Mais ce n'est pas le seul outil d'analyse que nous utiliserons ici. L'analyse des données fournit des descriptions classiques de la distribution d'une variable, ou de l'interaction entre deux variables. Pour structurer les données selon notre problématique, mettre en évidence les facteurs en jeu, leurs liaisons et leur hiérarchie, nous disposons de plusieurs méthodes d'analyse :

-l'analyse des similarités,

-l'implication entre classes de variables,

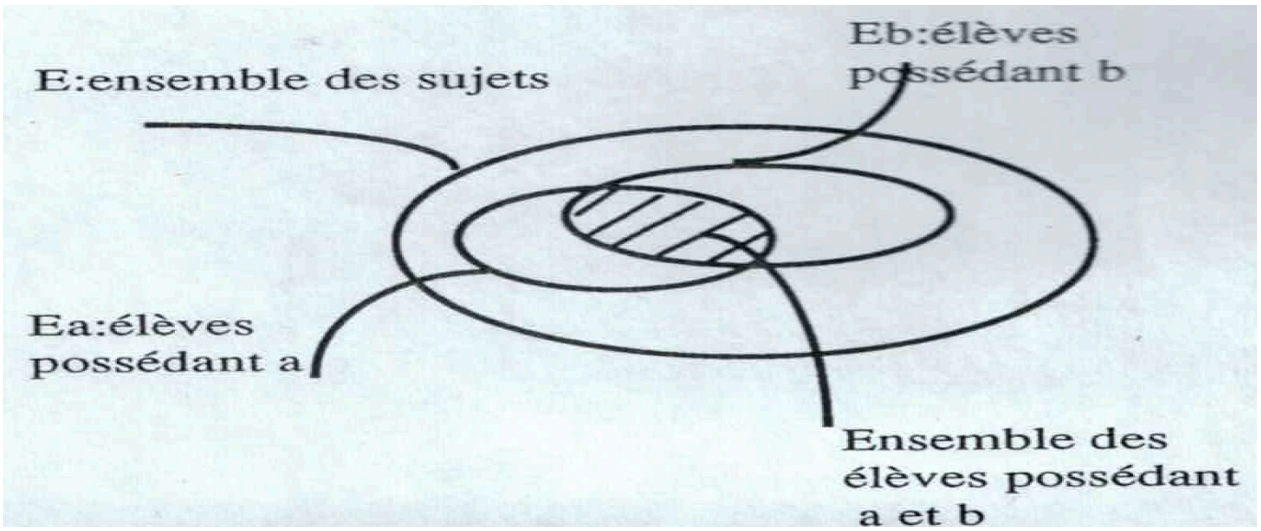
-les graphes et arbres implicatifs,

-l'analyse factorielle des correspondances.

4-1-1 - L'analyse des similarités selon I.C. Lerman

Nous utilisons la méthode de classification de Lerman selon l'algorithme dit de la vraisemblance du lien. Il permet d'agréger un ensemble d'attributs (ici des modalités de réponses) selon le principe suivant : la similarité entre deux attributs a et b est mesurable à l'aide du cardinal de l'ensemble Ea $\cap$ Eb des individus qui les possèdent simultanément. Mais cette similarité, risquant d'être biaisée par les cardinaux Ea et Eb (individus possédant respectivement a et b), il faut intégrer cette information en comparant statistiquement le cardinal de Ea $\cap$ b à celui que l'on obtiendrait en choisissant au hasard des parties de mêmes cardinaux que Ea et Eb dans E.

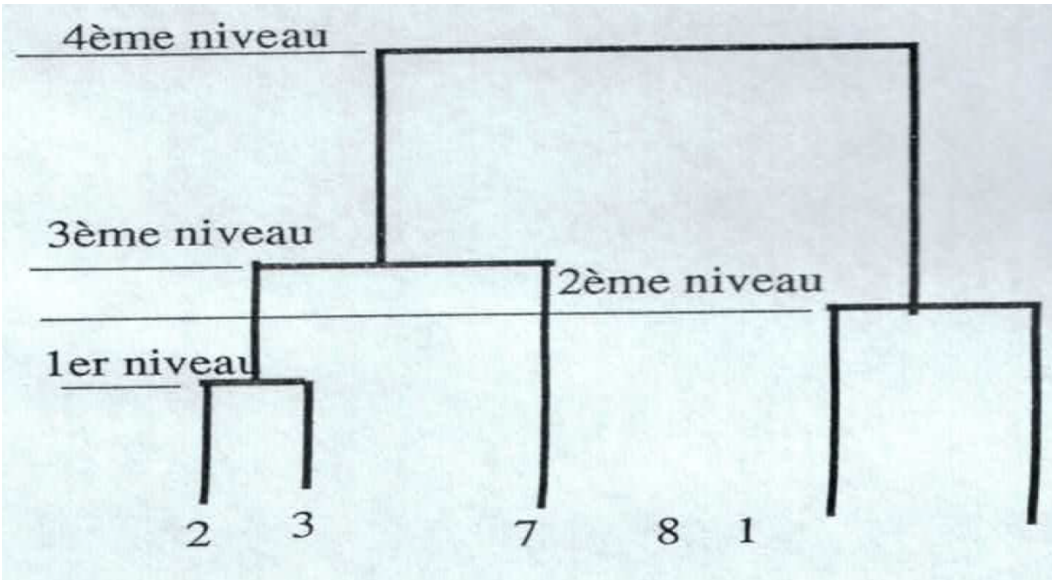
La représentation de ce problème peut se traduire par le schéma suivant :



SCHEMA : ANALYSE DES SIMILARITES

Un algorithme ascendant agrège les attributs en classes, et les classes en surclasses jusqu'à la classification complète.

On cherche ainsi à constituer, sur l'ensemble **V** des variables, des partitions de moins en moins fines, construites de façon ascendante, à l'aide d'un critère de similarité entre variables. Nous nous intéressons à ce type d'analyse qui permet d'étudier puis d'interpréter en termes de typologie et de ressemblance décroissante des noyaux de variables, constitués significativement à certains niveaux de l'arbre et s'opposant à d'autres à ces mêmes niveaux :



SCHEMA : ARBRE DE CLASSIFICATION

A chaque niveau de cet "arbre" de classification (voir l'exemple ci-dessus), on rassemble au premier niveau les deux modalités 2 et 3, puis les modalités 8 et 1 au deuxième niveau, puis au troisième niveau une modalité et une classe de modalités { (2 ; 3) ; 7 } et enfin deux classes de modalités { (2 ; 3) ; 7 } et (8 ; 1) au quatrième niveau. C'est à ce dernier niveau que l'indice de similarité est, bien entendu, le plus faible. Une illustration intéressante est fournie par l'article rédigé par Gras, Bessot, Comiti, "*Analyse d'opinions d'instituteurs à l'égard de l'appropriation des nombres naturels par les élèves du cycle préparatoire*", Publication interne n°155 de l'I.R.I.S.A. (Institut de Recherche en Informatique et Système Aléatoire, Rennes, Novembre 1981).

4-1-2 - Implication entre variables et classes de variables

Selon une méthode analogue à celle de Lerman, Gras mesure l'implication statistique d'un attribut a sur un attribut b, à partir de l'indicateur de base E a

b- ensemble des individus contredisant a

b . On dira que l'implication est (presque) vraie si l'effectif de Ea

Eb- est faible eu égard aux effectifs de E, Ea, et Eb-. Concrètement, cela signifie que l'ensemble Ea est (presque) contenu dans l'ensemble Eb.

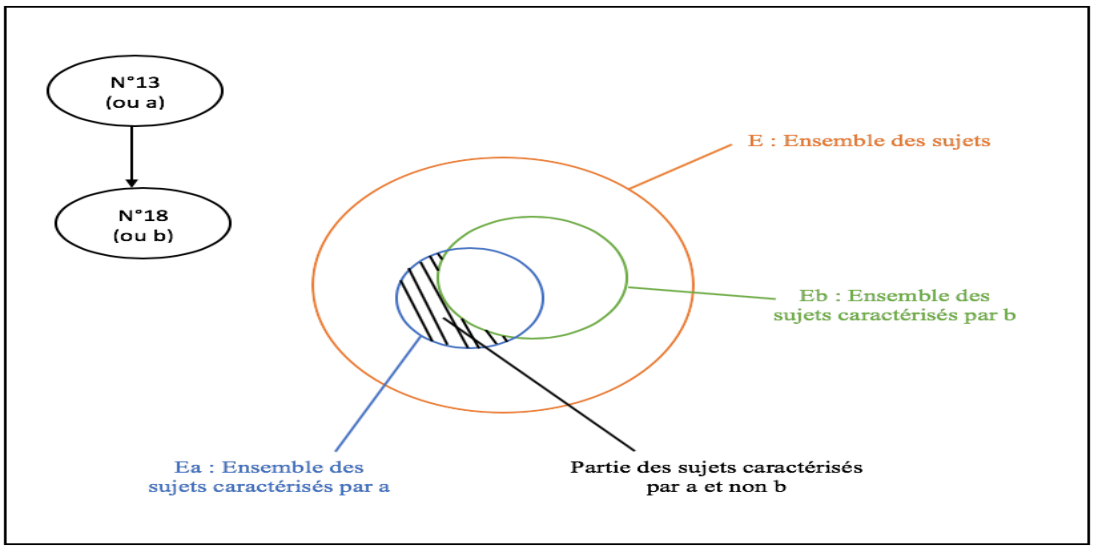
Une intensité d'implication de 0 à 1 spécifie une valeur de vérité modale de a

b. Plus cette intensité est grande, plus l'affirmation de l'implication est crédible. "*Un graphe dit d'implication donne une représentation de l'ensemble des relations implicatives les plus fortes, opératoire pour l'analyse et l'interprétation.*" ("Le micro-ordinateur, outil de révélation et d'analyse du raisonnement déductif de l'élève", Gras, Fontaine, Larher, Nicolas, Simon, Publication de l'I.R.M.A.R., Rennes I, Fascicule 5, p. 32, Février 1989).

Dans cette recherche, l'analyse statistique consiste en l'étude des liaisons unilatérales induites par l'implication statistique, sur la base d'une quasi-inclusion d'ensembles d'erreurs ou de réussites aux divisions. L'ordinateur donne la liste des intensités d'implication, à un seuil fixé, par exemple .95 dont les valeurs permettent de créditer les hypothèses formulées. A partir de ce graphe d'implication, nous pouvons émettre des conjectures du type : la réussite à une question donnée entraîne la réussite à une autre question, telle erreur implique telle autre erreur ? Les mots "entraîne" et "implique" n'ont pas a priori de sémantique causale. C'est l'analyste qui, selon les contextes, pourra faire l'hypothèse de cette causalité, plus particulièrement si l'intensité d'implication est forte.

Par exemple, considérons l'implication a->b. Elle est admissible au sens suivant : l'effectif de réussite à la division n°13, ensemble caractérisé par a, mais ne réussissant pas la division n°18, ensemble caractérisé par b (élèves dont les protocoles contredisent donc l'implication), est significativement faible par rapport à celui que l'on pourrait attendre d'une absence de lien unilatéral

entre ces deux divisions. En d'autres termes, d'une part, l'effectif de réussite de la division n°13 est plus faible que celui de la division n°18; d'autre part, il existe fort peu d'élèves réussissant a et pas b: Ea est presque totalement contenu dans Eb. Ainsi, on dira que réussir la division n°13 implique, au sens large, réussir la division n°18 ou bien encore, si les difficultés relatives à la division n°13 sont maîtrisées, alors celles de la division n°18 le sont aussi. Par ailleurs, les élèves qui réussissent la division n°18, ne réussissent pas nécessairement la division n°13, car la liaison est unilatérale (voir le schéma ci-dessous à cet effet) :

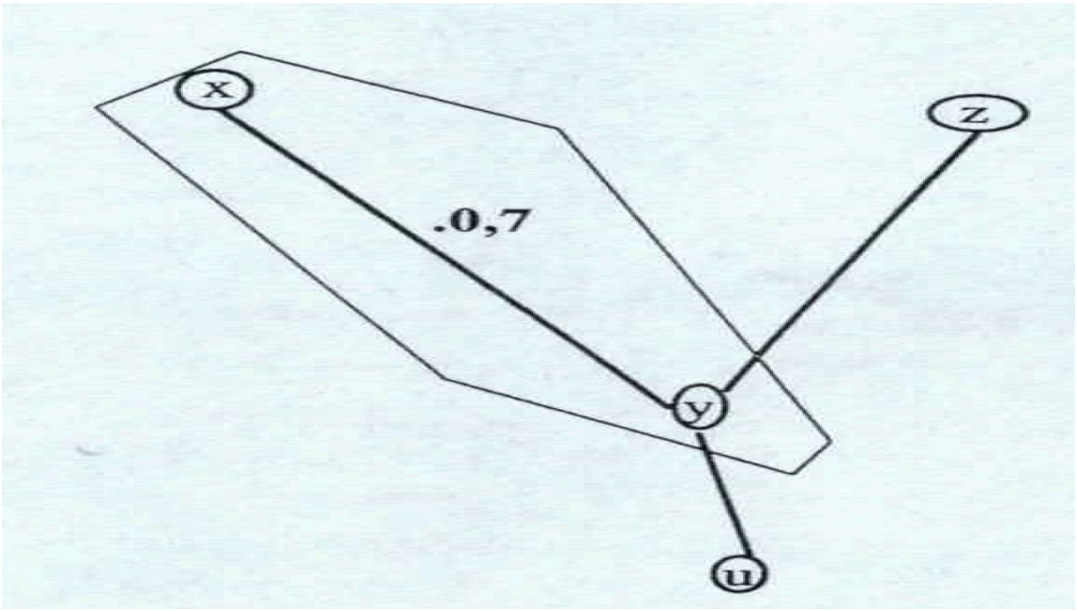


SCHEMA : LIAISON IMPLICATIVE

A ces relations implicatives, on peut associer, nous l'avons dit, un graphe orienté, et grâce à cette construction, interpréter la structure générale des implications. Une représentation de ce graphe a été informatisée par Rostan à Rennes, et Ratsimba Rajohn à Bordeaux par la suite.

Larher dans sa thèse (1991) nous apporte les précisions suivantes :

"Notons que les attributs se succèdent le long d'un chemin du graphe selon l'ordre croissant de leurs occurrences : les sources correspondent aux attributs les plus fréquents. Pour faciliter la lecture et l'interprétation du graphe, nous allons donner une condition de la fermeture transitive : nous dirons que x et y appartiennent au même "chemin", x étant un des prédécesseurs de y, d'ordre supérieur ou égal à deux, lorsque l'indice est supérieur à 0,5."



EXEMPLE : L'INDICE DEFINIT L'IMPORTANCE DE LA LIAISON

Vergnaud après la thèse de Gras, soulève la question d'une relation implicative entre classes de procédures. Il s'agit ainsi de rechercher des liaisons dans un ensemble de caractères et de classes de caractères, afin de mettre en évidence une structure cognitive stable chez un ensemble d'élèves de niveau scolaire équivalent. Dans son article "L'analyse des données", dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques (*Vol.12, n°1, pp. 59-72, 1992), Gras souligne que l'examen d'une telle relation entre deux classes n'ayant véritablement un sens que dans le cas d'une "*bonne fermeture*" des classes, le concept de cohésion d'une classe est défini comme antinomique de celui de "désordre implicatif" (au sens de l'entropie dans la théorie de l'information). De là découle la recherche d'implications entre deux classes bien "cohésives", i.e déjà ordonnées en leur sein.

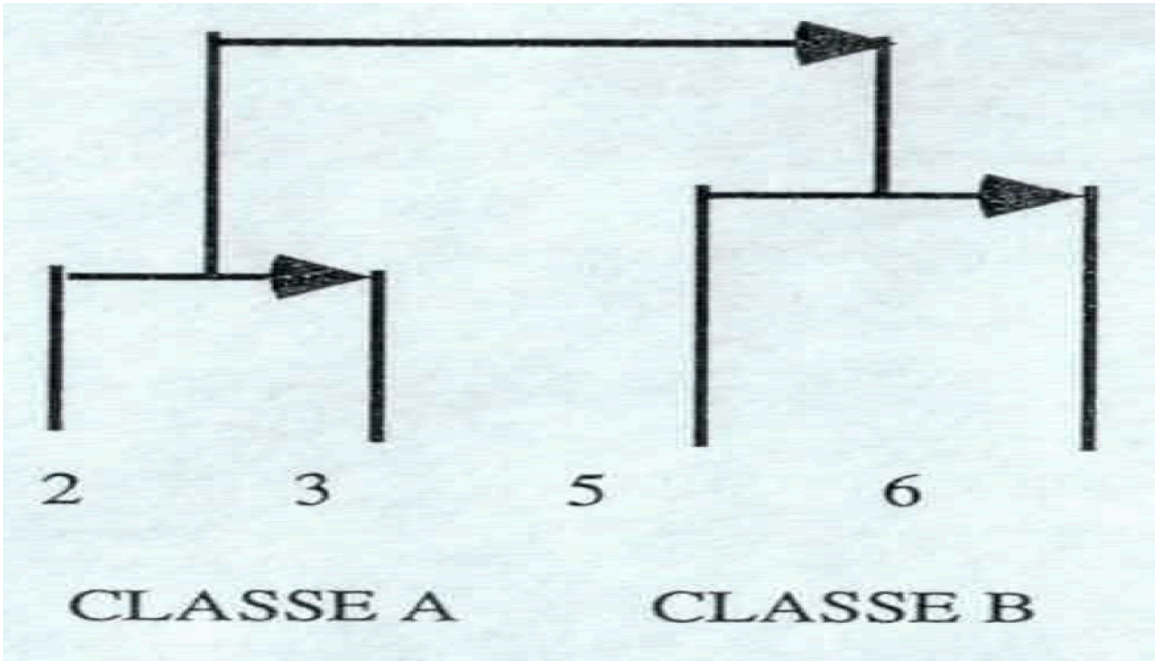
"*Cette liaison sera, dans le cas des classes de procédures, d'autant plus crédible que cette classe présentera elle-même une cohésion dirigeant les structures internes dans le même sens que celui qu'elles devront exprimer sur le plan externe. En psychologie cognitive, nous dirons que nous cherchons des micro-genèses à travers des liaisons intra-classes se développant et se ramifiant en macro-genèses à travers des liaisons inter-classes. Il est alors évident que si cet objectif est atteint, sa nature se distingue nettement des méthodes traditionnelles d'analyses de données où distance, similarité et variance représentent les critères structurant ces données ou des classes de données de façon symétrique. Ici, c'est au contraire la dissymétrie qui nous intéressera car elle seule restituera la dynamique qui sous-tend une genèse*." (Larher, Thèse : "Implication statistique et applications à l'analyse de preuve mathématique", p.II, 1991).

La cohésion est un indicateur de l'ordre implicatif au sein d'une classe de variables. L'indice de cohésion est calculé à partir des indices d'implication entre deux variables, mais aussi à partir de l'entropie, distance probabiliste qui rend compte du "désordre informationnel" et qui est fonction

de la consistance de la classe formée (Larher, 1991).

Plus une classe est située au niveau bas, plus les cohésions sont les plus fortes, plus on "monte", plus l'indice de cohésion de la classe diminue. Les flèches indiquent le sens de l'implication entre les classes. Il faut donc interpréter la classe et l'implication séparément, en fonction de l'indice d'implication entre classes. Cet arbre, à la différence de celui de Lerman, ne se ferme pas nécessairement, quand par exemple la cohésion est nulle ; elle n'apporte que les informations pertinentes.

Chaque classe de variables est ainsi caractérisée par sa propre cohésion et par ses relations avec les autres. Ensuite, et ceci afin de décrire le courant traduisant l'information qui se transmet d'une classe A à une classe B, on essaie de traduire par un schéma la cohésion des variables comme dans l'exemple ci-dessous:



SCHEMA : HIERARCHIE IMPLICATIVE ENTRE CLASSES DE VARIABLES

Nous parlons ici de « ***filiation procédurale*** » (Gras, 1992), entre les différentes classes de variables représentant les différentes orientations que détermine le comportement des élèves. Les groupes de variables les plus fortement reliés et leurs liaisons sont ainsi identifiés. Gras a élaboré, avec Larher un indice d'implication entre attributs (dans l'article : « L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données, » issu de la revue « Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines », Ecole E.H.S.S., n° 120, Décembre 1992).

Les indices implicatifs, entre variables et classes de variables, sont compris entre 0 et 1 et

donnent des informations. Nous avons retenu l'indice .97 dans notre expérience lorsque nous considérons deux variables, et .50 pour les fermetures transitives. Cette valeur de .97 est significative de l'importance de la relation implicative. Les indices d'implication inférieurs à .50, pour deux variables, ne peuvent pas être retenus. Dans le calcul de la cohésion, ils conduisent à une cohésion nulle de la classe considérée. C'est ainsi que les indices d'implication et la cohésion doivent être explicités, pour effectuer l'analyse ; comme nous l'avons déjà dit, ce sont leurs valeurs numériques qui donnent du crédit aux conjectures.

De façon générale, les deux méthodes basées sur la similarité et l'implication permettent de définir, à partir de classes de procédures, des conceptions stables et consistantes. En conclusion, soulignons deux points qui paraissent importants dans l'emploi d'une telle méthodologie :

-Les méthodes ayant des fondements mathématiques différents, comme l'analyse hiérarchique, l'analyse des similarités ou l'analyse factorielle de correspondances, conduisent à des résultats qui se complètent de façon enrichissante. Cela permet d'analyser et d'apprécier les diverses dimensions des difficultés rencontrées par les élèves dans les divisions.

-Il arrive que l'interprétation confirme une connaissance évidente. Cette absence de contradiction avec le « connu » ou le « vraisemblable » lui apporte cependant une plus grande crédibilité : il faut notamment évaluer la stabilité ou la variabilité des erreurs des sujets. Il arrive aussi que ces méthodes mettent en évidence des phénomènes peu connus, voire surprenants. C'est évidemment leur intérêt principal.

Notons enfin, que les traitements statistiques des deux méthodes présentées ci-dessus sont effectués à l'aide du logiciel C.H.I.C. (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive), conçu par Gras et développé par lui-même sur TO7, puis par Almouloud sur P.C. au sein de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

4-2 – Traitement informatique retenu et dépouillement

L'enregistrement des 218 variables initiales (nous décrirons seulement celles que nous retenons dans notre analyse), est traité par un logiciel nommé SYSTAT. Nous nous en servons pour créer un fichier de données et obtenir des tris et croisements de variables. Bien d'autres possibilités sont offertes par le logiciel (tests statistiques, graphiques, etc..), mais ne sont pas utilisées ici. L'éditeur de données se présente comme un tableur classique de type EXCEL. Les noms des variables sont introduits en intitulés de colonnes. Les lignes représentent les individus et sont automatiquement numérotées.

Après un tri à plat effectué pour chacune des 218 variables, un tri est effectué selon des critères d'échec, afin de sélectionner celles que nous retenons pour les autres analyses.

C'est alors que nous utilisons le logiciel de traitement des données relatives aux variables que nous voulons traiter. Il s'agit du logiciel CHIC (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésive), qui propose la saisie de données et différentes opérations sur ces données, le calcul des paramètres (moyenne, écart-type et corrélation), l'analyse de similarité, classification hiérarchique selon Lerman, l'analyse implicative selon Gras, la construction du graphe implicatif, la hiérarchie implicative de classes selon Gras et Lahrer .

Nous codons « 1 » la réussite et « 0 » l'échec (ou présence – absence ou juste – faux), pour les différentes variables retenues pour les analyses implicatives, hiérarchiques, et factorielles des correspondances. Les réponses sont entrées sur ordinateur, le logiciel C.H.I.C. calcule tous les indices de similarité :

-entre les variables 2 à 2 : rappelons que celles qui ont le plus fort indice de similarité se réunissent en une première classe, c'est-à-dire au premier niveau,

-puis entre une variable et une classe,

-enfin entre classes (les ressemblances ou différences entre les classes d'items ou les classes d'items sont traduites graphiquement sous la forme d'un arbre).

La **corrélation** est forte entre deux variables lorsque celles-ci ont un taux de réussite ou d'échec similaire (ou présence et absence) et si le coefficient de corrélation est proche de 1 (ou -1, cela indique des procédures convergentes (ou divergentes). Nous nous servons de l'occurrence (nombre de fois où la variable est présente sur le nombre d'individus).

Un logiciel nommé CHADOC, créé par une équipe de recherche de l'I.U.T de Nice, permet d'effectuer des analyses de données sur des tableaux statistiques importants (plusieurs milliers d'individus et plusieurs centaines de variables). Il a été conçu pour réaliser entre autres, des analyses factorielles des correspondances en composantes simples et en correspondances multiples. C'est ce logiciel que nous utiliserons pour effectuer les analyses factorielles.

Pour l'analyse des composantes simples, les données de base sont les variables concernant les caractéristiques des divisions (virgule, zéro intercalaire, etc…), et les modalités de réussite et d'échec de ces opérations, que nous avons choisies, susceptibles d'être corrélées entre elles. Une première analyse nous permet de mettre en relation ces variables.

La méthodologie consiste donc à effectuer au départ une sélection des axes factoriels. L'axe de premier ordre (Axe 1), correspond au maximum du pourcentage de la variance et donc de l'information contenue dans les données. Le deuxième axe fournit la meilleure information parmi tous les axes restants, etc.

CHAPITRE IV : ANALYSE A PRIORI

Dans notre analyse a priori, nous considérons les 28 divisions que nous avons sélectionnées par ordre de difficulté croissante. Nous effectuons des regroupements des différentes divisions en fonction de leurs caractéristiques opératoires. La classification choisie considère ces divisions et les caractères que nous avons sélectionnés pour l'ensemble du protocole. C'est à partir de cette classification que nous essayons de faire émerger une relation entre les procédures des élèves et les caractéristiques des opérations données.

Les conclusions fournies par l'analyse statistique ne peuvent être dissociées de l'étude des structures et des caractères mêmes des divisions. L'objet qui nous intéresse ici est bien lié aux différents sens alloués au schème-algorithme, quand celui-ci est en voie de constitution chez un élève entre le cours moyen première année et la cinquième.

Avant de faire l'interprétation des erreurs des élèves, nous considérons leurs explications susceptibles de nous aider, en l'occurrence, les caractéristiques des divisions présentées. Le choix de ces caractéristiques repose sur l'hypothèse qu'elles ont une influence sur l'utilisation des propriétés mathématiques en jeu dans l'algorithme, et ceci en fonction de l'apprentissage en usage dans notre population d'élèves.

Ces divisions, courtes ou longues, comportent parfois un zéro intercalaire ou terminal au dividende, au diviseur, ou au quotient ; certaines d'entre elles ont un dividende supérieur ou inférieur au diviseur, ou bien encore le nombre de chiffres des dividendes d'étape est supérieur à celui du diviseur. Enfin, le quotient peut être décimal ou non.

Les divisions que nous supposons les plus complexes sont celles qui comportent un dividende d'étape inférieur au diviseur, un peu moins complexes celles dont le nombre de chiffres du quotient est supérieur à 3, celles enfin qui ont un quotient décimal.

Les caractéristiques devraient nous permettre d'analyser les niveaux de fonctionnement, les procédures utilisées, ainsi que les sources de réussite et d'efficacité. Nous supposons toutefois, que les résultats n'expliqueront pas l'ensemble des comportements observés, mais répondront aux assertions suivantes :

-les critères de ressemblance des divisions entre elles éclairent la façon dont les élèves en disposent, avec les techniques de calcul qu'ils utilisent ;

-le fait de contracter dans une même opération multiplication et soustraction devrait nous permettre par extension, de cerner les avantages et les désavantages de l'enseignement lorsque l'apprentissage

de l'algorithme se fait directement avec la soustraction non posée ;

-la compréhension de l'opération n'est pas acquise en Cours Moyen deuxième année, en sixième et en cinquième, et son extension aux décimaux est problématique, à cause des problèmes de positionnement de la virgule au quotient notamment ;

-enfin, la présence d'un zéro intercalaire ou terminal au quotient apporte des difficultés spécifiques.

Nous citons ici brièvement les contenus des instructions officielles les plus récentes :

Année 1985

Pour la fin de l'école élémentaire, on peut lire :

"-pr*oblèmes relevant de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ; élaboration, dans l'ensemble des décimaux, des techniques opératoires, mentales ou écrites, et des procédés de calcul approché (ordre de grandeur et encadrements)*".

Pour la classe de sixième :

"*-Techniques opératoires (mentales ou écrites) sur les nombres entiers et décimaux. Procédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat*."

Année 1991

Pour les classes de C.M.1 et de C.M.2:

-"*Savoir multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10 / 100 / 1000, multiplier le cas échéant un nombre entier ou décimal par 0,1 / 0,01, connaître quelques critères de divisibilité… »*

-« Maîtriser les techniques opératoires usuelles : addition, soustraction, multiplication des entiers ou des décimaux, division euclidienne (avec quotient et reste) de deux entiers, division d'un décimal par un entier (le calcul du quotient de deux décimaux n'est pas un objectif de ce cycle)."

Pour la classe de sixième :

"*-Calcul du quotient de deux décimaux*".

Dans les programmes et instructions pour l'école élémentaire (Chevènement, Avril 1985), on trouve :

-au cours élémentaire : "*aborde la division*".

-au cours moyen :

le terme "*division*" ne figure pas et est remplacé par "*fraction*"; on le trouve dans les "*situations-problèmes « .*

Dans les commentaires de Instructions Officielles de 1970, on note au sujet des techniques opératoires en général :

"*Elles seront d'autant mieux acquises que les enfants, au lieu de les apprendre de façon purement mécanique, les auront découverts par eux-mêmes comme synthèse d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées*".

PARTIE EMPIRIQUE

PLAN : PARTIE EMPIRIQUE

CHAPITRE I : CONTEXTE EXPERIMENTAL ET TRAITEMENT DES DONNEES

1 - CHOIX ET PASSATION DE L'EPREUVE

2 - PREMIERE ANALYSE : POPULATION DE 400 SUJETS

3 - TRAITEMENT DES DONNEES : POPULATION DE 200 SUJETS

3-1 Distribution de l'échantillon

3-2 Choix des variables retenues

CHAPITRE II : ANALYSES HIERARCHIQUES

1- ANALYSE DES QUATRE NIVEAUX C.M.1, C.M.2, SIXIEME, CINQUIEME POUR LES REUSSITES ET LES ECHECS DES 26 DIVISIONS DES 200 SUJETS

1-1 Analyse hiérarchique des similarités

1-2 Analyse hiérarchique des implications entre variables

2- ANALYSE PRINCIPALE

2-1 Analyse hiérarchique des similarités

2-1-1 Classe de C.M.1

2-1-2 Classes de C.M.2, sixième et cinquième, prises ensemble

2-1-3 Description et étude comparative de chacun des trois niveaux C.M.2, sixième, cinquième, séparément

2-1-3-1 Classe de C.M.2

2-1-3-2 Classe de sixième

2-1-3-3 Classe de cinquième

2-1-4 Remarques supplémentaires sur les résultats des analyses hiérarchiques

2-2 Analyse hiérarchique implicative entre variables

2-2-1 Classe de C.M.1,

2-2-2 Classe de C.M.2, sixième, cinquième prises ensemble

2-2-3 Etude comparative des trois niveaux C.M.2, sixième, cinquième

2-2-4 Conclusion

2-3 Analyse hiérarchique implicative entre classes de variables

2-3-1 Classe de C.M.1

2-3-2 Classes de C.M.2, sixième, cinquième

2-3-3 Comparaison des trois niveaux: C.M.2, sixième

et cinquième

2-3-4 Conclusion

3- ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

3-1 Introduction

3-2 Première analyse : caractéristiques des divisions pour les classes de C.M.2, sixième, cinquième

3-2-1 Analyse du premier axe

3-2-2 Analyse du deuxième axe

3-3 Deuxième analyse: caractéristiques des divisions pour la classe de C.M.1

3-4 Troisième analyse : réussites ou échecs aux divisions et soustractions

3-5 Conclusion

4 - CONCLUSION GENERALE DE LA PARTIE EMPIRIQUE

CHAPITRE I : CONTEXTE EXPERIMENTAL

ET TRAITEMENT DES DONNEES

"*Au plan des règles opératoires elles-mêmes, la division est évidemment la plus complexe des quatre opérations parce qu'elle implique à la fois la soustraction, la multiplication et la recherche par tâtonnement ou encadrement des chiffres du quotient. Il ne faut pas s'étonner si de nombreux enfants la maîtrisent mal à la fin de l'enseignement élémentaire. La division par un nombre à virgule, par exemple, semble hors de portée de la majorité des enfants de 10 ou 11 ans.*" Vergnaud, "*L'enfant, la mathématique, la réalité*", Peter Lang, 1981, p.126.

1- CHOIX ET PASSATION DE L'EPREUVE

L'étude présentée ici vise à connaître l'origine et la nature des erreurs les plus fréquentes, à analyser les procédures utilisées par les élèves mis en situation de résoudre 28 divisions. C'est une étude dont les épreuves sont données dans différentes classes, du cours moyen première année (école élémentaire), à la cinquième (collège). La consigne donnée aux élèves était d'effectuer ces divisions, sans préciser quel était le nombre de chiffres à donner au résultat. Les élèves avaient plusieurs séances (4 et plus en fonction des classes) pour exécuter cette expérimentation. Aucune contrainte spécifique de temps n'était donc donnée. L'expérimentateur et l'instituteur ou le professeur, présents lors de la passation, se devaient de respecter une grande neutralité, sans accorder d'aide spécifique aux élèves concernés. Aucune table de multiplication, ou calculette n'était donnée.

Nous avons recueilli les données sur une population nombreuse (1700 sujets). L'objet de la recherche la plus précise considère une sélection de 200 sujets. C'est une sélection pour laquelle nous avons retenu des critères que nous verrons plus loin. Nous avons également effectué une première analyse sur un échantillon plus large qui comprend 400 élèves, (dont les 200 mentionnés ci-dessus), sans critères de sélection particulier. Ils sont choisis respectivement de la façon suivante :

-100 élèves de cours moyen première année,

-100 du cours moyen deuxième année,

-100 de sixième,

-100 de cinquième.

L'expérimentation se déroule dans plusieurs établissements. Les premières épreuves effectuées touchent des aspects variés de la division, susceptibles de donner lieu à divers types d'erreurs : 28 divisions ont été sélectionnées selon des critères qui sont expliqués ci-dessous. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication, de l'algorithme de la soustraction, et pour les élèves des trois dernières classes, la connaissance des nombres décimaux.

Les critères retenus pour les 28 divisions sont les suivants :

- 1 seul chiffre au diviseur : divisions portant les numéros 1-2-3-4-5-6-7-8-9-14 :

- reste nul ou non,

- quotient décimal ou non,

- dividende inférieur au diviseur,

- zéro intercalaire au quotient, au dividende, au diviseur,

- zéro terminal au quotient, au dividende, au diviseur,

- le reste partiel au dividende se répète et la division ne se termine pas,

- nécessité de prendre, pour le calcul du premier chiffre du quotient, un dividende supérieur au nombre de chiffres du diviseur,

Les principales difficultés envisagées dans notre analyse a priori, et lors de la construction du protocole sont ainsi relatives :

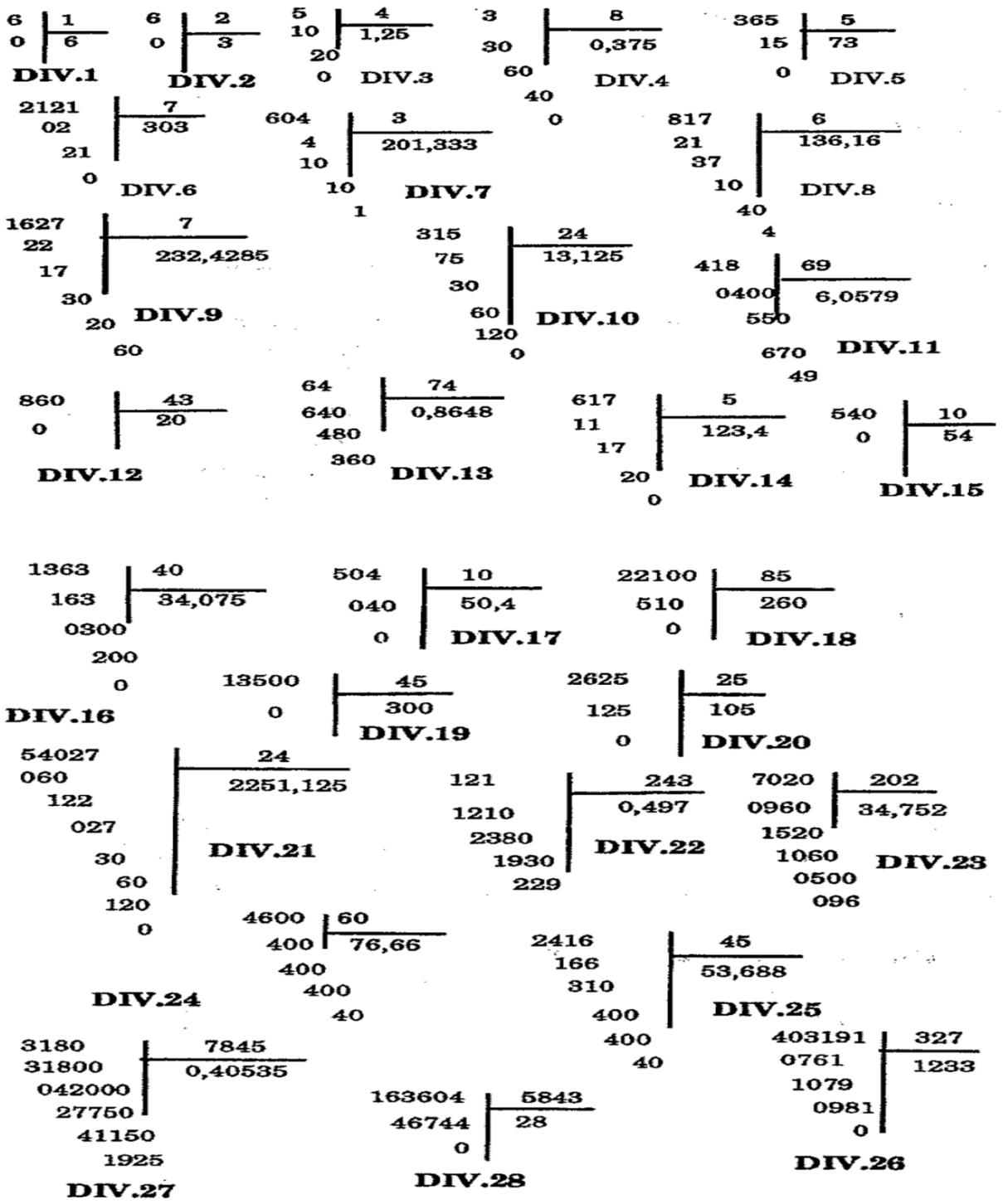
-à la longueur du nombre représentant le diviseur, le dividende et le quotient,

-au zéro terminal ou intercalaire dans ces nombres,

-au calcul et à l'ordre de grandeur du premier chiffre du quotient : le nombre de chiffres à prendre en considération au dividende, et ceci en fonction du nombre de chiffres du diviseur, est soit égal, soit supérieur au nombre de chiffres du diviseur ; ou bien il exige le placement d'un zéro au quotient quand le dividende est inférieur au diviseur,

-au placement correct de la virgule au quotient si celui-ci est décimal,

-à la justesse du calcul.



PROTOCOLE DES 28 DIVISIONS

Après un dépouillement à la main, nous avons classé systématiquement les erreurs des sujets, et nous avons établi un codage qui nous permet d'en faire plusieurs analyses. Nous avons pour cela utilisé des techniques statistiques récemment mises au point par l'équipe de R. Gras à

Rennes, et les logiciels correspondants.

Nous sommes en mesure de montrer que plusieurs difficultés indépendantes interviennent dans les erreurs et que certaines d'entre elles sont l'occasion d'amalgames qui traduisent des confusions dans les conceptions des élèves. Elles appellent donc une attention didactique accrue.

2 - PREMIERE ANALYSE : POPULATION DE 400 SUJETS

Nous allons d'abord considérer, pour évaluer la difficulté relative des 28 divisions, une population de 400 sujets prise au hasard. Aucun critère de sélection de cette population n'est envisagé. Pour la deuxième analyse, nous retiendrons 200 sujets, choisis selon des critères précis.

Notre première expérimentation ne vise donc qu'à établir la distribution des échecs et des réussites pour nos 28 divisions. Les résultats sont enregistrés par l'intermédiaire d'un logiciel de traitement de données nommé SYSTAT. L'éditeur de données se présente comme un tableau classique de type EXCEL, par exemple :

variables / sujets	division n°1	Soustraction	Premier chiffre du quotient	→ etc...
élève n°1	1 (ou juste)	0 (ou posée)	1	
élève n°2	0	1	0	
↓ etc...				

TABLEAU : EXEMPLE EDITEUR DE DONNEES

Les noms des variables sont introduits comme intitulés des colonnes. Les lignes représentant les individus sont automatiquement numérotées. Les résultats, obtenus grâce à un tri à plat, sont les suivants **(voir Tableau n°1 ci-dessous)**

TABLEAU N°1	REUSSITE/EFFECTIFS	ECHEC/EFFECTIFS	REUSSITE/POURCENTAGES	REUSSITE/POURCENTAGES
DIVISION n°1	395	5	98.75	1,25
DIVISION n°2	391	9	97.75	2,25
DIVISION n°3	318	82	79.50	20,50
DIVISION n°4	239	161	59.75	40,25
DIVISION n°5	334	66	83.50	16,50
DIVISION n°6	261	139	65.25	34,75
DIVISION n°7	184	216	46	54
DIVISION n°8	255	145	63.75	36,25
DIVISION n°9	255	145	63.75	36,25
DIVISION n°10	236	164	50	41
DIVISION n°11	173	227	43,25	56,75
DIVISION n°12	285	115	71,25	28,75
DIVISION n°13	141	259	35,25	64,75
DIVISION n°14	276	124	69	31
DIVISION n°15	320	80	80	20
DIVISION n°16	216	184	54	46
DIVISION n°17	235	165	58,75	41,25
DIVISION n°18	183	217	45,75	54,25
DIVISION n°19	247	153	61,75	38,25
DIVISION n°20	216	184	54	46
DIVISION n°21	149	251	37,25	62,75
DIVISION n°22	103	297	25,75	74,25
DIVISION n°23	102	298	25,50	74,50
DIVISION n°24	150	250	37,50	62,50
DIVISION n°25	141	259	35,25	64,75
DIVISION n°2§	126	274	31,50	68,50
DIVISION n°27	80	320	20	80
DIVISION n°28	113	287	28,25	71,25

TABLEAU N°1 : REUSSITES ET ECHECS AUX 28 DIVISIONS POUR LES 400 SUJETS

Les divisions (numéros 1, 2, 3, 5, 15), dont le diviseur ne comporte qu'un chiffre, ou est égal à dix, donnent lieu à un taux de réussite important (plus de 80%). Les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur (divisions n°4, n°13, n°22, n°27) soulèvent des difficultés qui appellent une étude plus approfondie, que nous ferons dans notre deuxième analyse. On peut relever immédiatement un autre phénomène intéressant : l'échec à la division n°7 (34% d'échec), celui à la division n°11 (56,75 % d'échec). Les dernières divisions du protocole sont toutes difficiles et demandent en effet un calcul plus délicat, soit à cause du nombre de chiffres composant le quotient (quatre chiffres dans la partie entière pour la division n°21), soit à cause du nombre de chiffres à prendre en compte pour l'évaluation de l'ordre de grandeur du premier chiffre du quotient.

Ces premières constatations nous paraissent majeures et requièrent une analyse détaillée. De même, les taux de réussite à la division n°1 (98,75% de réussite) et à la division n°2 (97,75% de réussite), nous conduisent à les exclure de l'analyse ci-après, laquelle n'est intéressante que s'il y a une proportion non négligeable d'erreurs. En outre, les techniques de l'analyse de données n'apporteraient pour ces divisions, que des informations triviales puisqu'elles s'appliqueraient à la quasi-totalité de l'échantillon, et ne seraient donc pas discriminantes.

Nous constatons aussi que douze divisions ont un taux d'échec supérieur à 50 %, cinq autres un taux qui oscille entre 40% et 50 %, quatre entre 35% et 40%, soit 21 divisions sur un total de 28 divisions au départ. L'échec est ainsi très important, pour des divisions qui, rappelons-le, ont toutes des dividendes et des diviseurs entiers.

L'échec s'élève de façon significative dès que le nombre de chiffres au diviseur augmente. Nous pensons que ce facteur se conjugue avec d'autres difficultés, notamment le problème de l'évaluation du chiffre courant du quotient, tout au long de l'opération.

De plus, nous avons effectué des observations sur les protocoles eux-mêmes (quand la soustraction était posée), que nous ne détaillerons pas ici. Celles-ci montrent que les multiplications effectuées au sein même de l'opération ont un taux d'échec plus important que les soustractions. Le codage et l'analyse statistique choisis ne nous permettent pas malheureusement de détailler ces aspects. Il est en effet difficile de localiser les erreurs liées à la mauvaise connaissance des tables de multiplication par exemple, bien que la présence au diviseur de nombres comme 69 (division n°11) ou 85 (division n°18), représente probablement un facteur d'échec.

Etudions maintenant la répartition des pourcentages de réussite des 28 divisions pour nos quatre niveaux scolaires (voir tableau n°2 page suivante) :

Les pourcentages de réussite sont assez homogènes pour les divisions comportant un diviseur à un chiffre, à l'exception de celles qui possèdent un zéro intercalaire. La division n°6, par exemple, est plus réussie au C.M.2. La division n°7, est mieux réussie au C.M.1, mais il est vrai que dans cette classe, le calcul s'arrête avant le positionnement de la virgule. Le fait de considérer

une division qui ne "s'achève pas", représente en effet, pour les autres élèves une difficulté très importante (voir à cet effet, la suite de notre analyse).

	CM1	CM2	Sixième	Cinquième
DIV n°1	98	99	100	98
DIV n°2	100	99	100	98
DIV n°3	92	82	76	92
DIV n°4	40	80	68	78
DIV n°5	90	94	90	92
DIV n°6	68	76	58	64
DIV n°7	64	64	66	74
DIV n°8	58	78	74	80
DIV n°9	76	82	72	80
DIV n°10	64	48	54	76
DIV n°11	44	44	42	58
DIV n°12	62	76	70	90
DIV n°13	36	50	36	48
DIV n°14	64	72	78	94
DIV n°15	80	80	86	92
DIV n°16	60	50	48	74
DIV n°17	74	58	54	72
DIV n°18	46	58	38	48
DIV n°19	60	72	62	80
DIV n°20	54	70	54	74
DIV n°21	38	56	36	50
DIV n°22	20	26	36	36
DIV n°23	22	32	32	38
DIV n°24	38	66	46	68
DIV n°25	42	54	34	36
DIV n°26	12	34	32	46
DIV n°27	10	32	18	24
DIV n°28	6	34	28	38

TABLEAU N°2 : REUSSITES AUX DIVISIONS SELON LES 4 NIVEAUX (en %)

En classe de C.M.1, les divisions dont les dividendes sont inférieurs aux diviseurs, celles qui possèdent un zéro au quotient et un diviseur à deux chiffres, et celles dont le diviseur comportent au moins trois chiffres observent un taux supérieur d'échec.

Les échecs sont plus importants en sixième pour les divisions longues (numéros 21, 25, 28),

pour celles qui possèdent un dividende d'étape inférieur au diviseur (numéros 11, 4, 13, 27), et pour les divisions n°6 et n°20, qui ont un zéro intercalaire au quotient. La difficulté liée à la conception du zéro, s'accentue en sixième. Dès la cinquième, une amélioration des résultats nous permet d'envisager une évolution de ce type de schème. Nous reviendrons plus longuement sur ce point dans la suite de nos analyses.

Les réussites sont meilleures globalement en cinquième et au C.M.2. Nous obtenons, en moyenne, 57,6% de réussite au C.M.1, 68,08% au C.M.2, 53,3% en sixième, et 64% en cinquième.

Cette analyse descriptive suggère une étude plus approfondie des liens entre variables qualitatives, à partir d'une analyse factorielle des correspondances présentée plus loin.

3- TRAITEMENT DES DONNEES : POPULATION DE 200 SUJETS

3-1 Distribution de l'échantillon

Nous considérons donc maintenant un échantillon de 200 sujets dont la composition s'établit après tirage au sort de la manière suivante :

-Les sujets sont répartis de manière égale sur les quatre niveaux scolaires considérés : 50 élèves de cours moyen première année, 50 de cours moyen deuxième année, 50 de sixième, et 50 de cinquième.

-Pour équilibrer grossièrement les catégories socioprofessionnelles, nous avons retenu, pour chaque niveau scolaire, 50% des élèves ayant un père cadre, et 50% un père ouvrier.

- 50 % de la population représente des filles et 50 % des garçons.

Enfin, pour analyser avec plus de sûreté les procédures des élèves, nous avons retenu un grand nombre de protocoles dans lesquels les soustractions étaient effectivement posées : 50%, dans notre échantillon de 200. Les résultats globaux montrent que les pourcentages de réussite sont cependant comparables entre l'échantillon de 200 et celui de 400 élèves. Précisons aussi que seulement 10% (environ) des 1700 protocoles de départ comportent des soustractions posées, ce qui est un taux extrêmement faible auquel nous ne nous attendions pas. Cette procédure est donc relativement rare.

Pour chaque division (Tableau n°1), sont retenues les caractéristiques (chiffres au quotient, virgule…) qui lui sont propres.

L'analyse statistique est ainsi effectuée sur un total de 168 variables (Tableau n°3). Ces 168

variables sont codées 1 (respectivement 0), suivant que le caractère est présent, ou la division est réussie (respectivement le caractère est absent ou il y a échec).

Les variables principales concernent les divisions et leurs caractéristiques.

Les autres variables concernent les caractéristiques de la population que nous venons d'évoquer, ainsi que la variable "retard scolaire". On considère si l'enfant a redoublé ou non, en ne retenant que ceux qui ont redoublé l'année en cours. Ces dernières variables ne sont traitées que dans l'analyse factorielle des correspondances, à titre de "variables secondaires", nous les désignerons par la suite par cette dernière expression.

VARIABLES PRINCIPALES

Légendes :

Q1 : premier chiffre au quotient
Q2 : deuxième chiffre au quotient

DIVISION 1	Q1 Chif					
DIVISION 2	Q1 Chif					
DIVISION 3	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 4	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 5	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 6	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule	Zéro intercalaire quotient		
DIVISION 7	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule	Zéro intercalaire quotient	Zéro intercalaire dividende	
DIVISION 8	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 9	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 10	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 11	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule	Zéro intercalaire quotient		

DIVISION 12	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro terminal diviseur	Zéro terminal dividende
DIVISION 13	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 14	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 15	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro terminal diviseur	Zéro terminal dividende
DIVISION 16	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro terminal diviseur	Zéro terminal dividende
DIVISION 17	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro terminal diviseur	
DIVISION 18	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro terminal diviseur	Zéro terminal dividende
DIVISION 19	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			Zéro terminal dividende
DIVISION 20	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule	Zéro intercalaire quotient		
DIVISION 21	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro intercalaire dividende	
DIVISION 22	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 23	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			Zéro terminal dividende
DIVISION 24	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			Zéro terminal dividende
DIVISION 25	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			
DIVISION 26	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro intercalaire dividende	
DIVISION 27	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule			Zéro terminal dividende
DIVISION 28	Q1 Chif	Q2 Chif	Virgule		Zéro intercalaire dividende	Zéro terminal dividende

VARIABLES SECONDAIRES

Classe (CM1, CM2, sixième, cinquième)
CSP (père) : ouvrier, cadre…
Sexe (fille, garçon)

Retard dans la classe considérée (retard, non retard)
Soustraction dans la division 1 (présence – absence)
Soustraction dans la division 2 (présence – absence)
Soustraction dans la division 4 (présence – absence)
Soustraction dans la division 5 (présence – absence)
Soustraction dans la division 6 (présence – absence)
Soustraction dans la division 7 (présence – absence)
Soustraction dans la division 8 (présence – absence)
Soustraction dans la division 9 (présence – absence)
Soustraction dans la division 10 (présence – absence)
Soustraction dans la division 11 (présence – absence)
Soustraction dans la division 12 (présence – absence)
Soustraction dans la division 13 (présence – absence)
Soustraction dans la division 14 (présence – absence)
Soustraction dans la division 15 (présence – absence)
Soustraction dans la division 16 (présence – absence)
Soustraction dans la division 17 (présence – absence)
Soustraction dans la division 18 (présence – absence)
Soustraction dans la division 19 (présence – absence)
Soustraction dans la division 20 (présence – absence)
Soustraction dans la division 21 (présence – absence)
Soustraction dans la division 22 (présence – absence)
Soustraction dans la division 23 (présence – absence)
Soustraction dans la division 24 (présence – absence)
Soustraction dans la division 25 (présence – absence)
Soustraction dans la division 26 (présence – absence)
Soustraction dans la division 27 (présence – absence)
*Soustraction dans la division 28 (présence – absence)*l

TABLEAU N°3 : NOMS DES VARIABLES

3-2 - Choix des variables retenues

Pour les analyses hiérarchiques et les analyses d'implication nous ne retenons que les variables dont les pourcentages d'échec sont supérieurs à 20%, en faisant cette sélection pour chaque niveau de classe (Tableau n°4).

Ainsi, nous envisageons 54 variables, nombre maximal autorisé par le logiciel utilisé pour les analyses hiérarchiques.

Nous ne retenons pas pour la classe de C.M.1 les variables concernant le dividende inférieur au diviseur, dont le taux d'échec est élevé, et nous abandonnons aussi les variables virgule, zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient, premier ou second chiffre du quotient (quand ceux-ci sont situés après la virgule), pour la raison que les élèves n'ont pas encore appris les divisions à quotient décimal, ou très peu : ci-dessous Tableau n°4 :

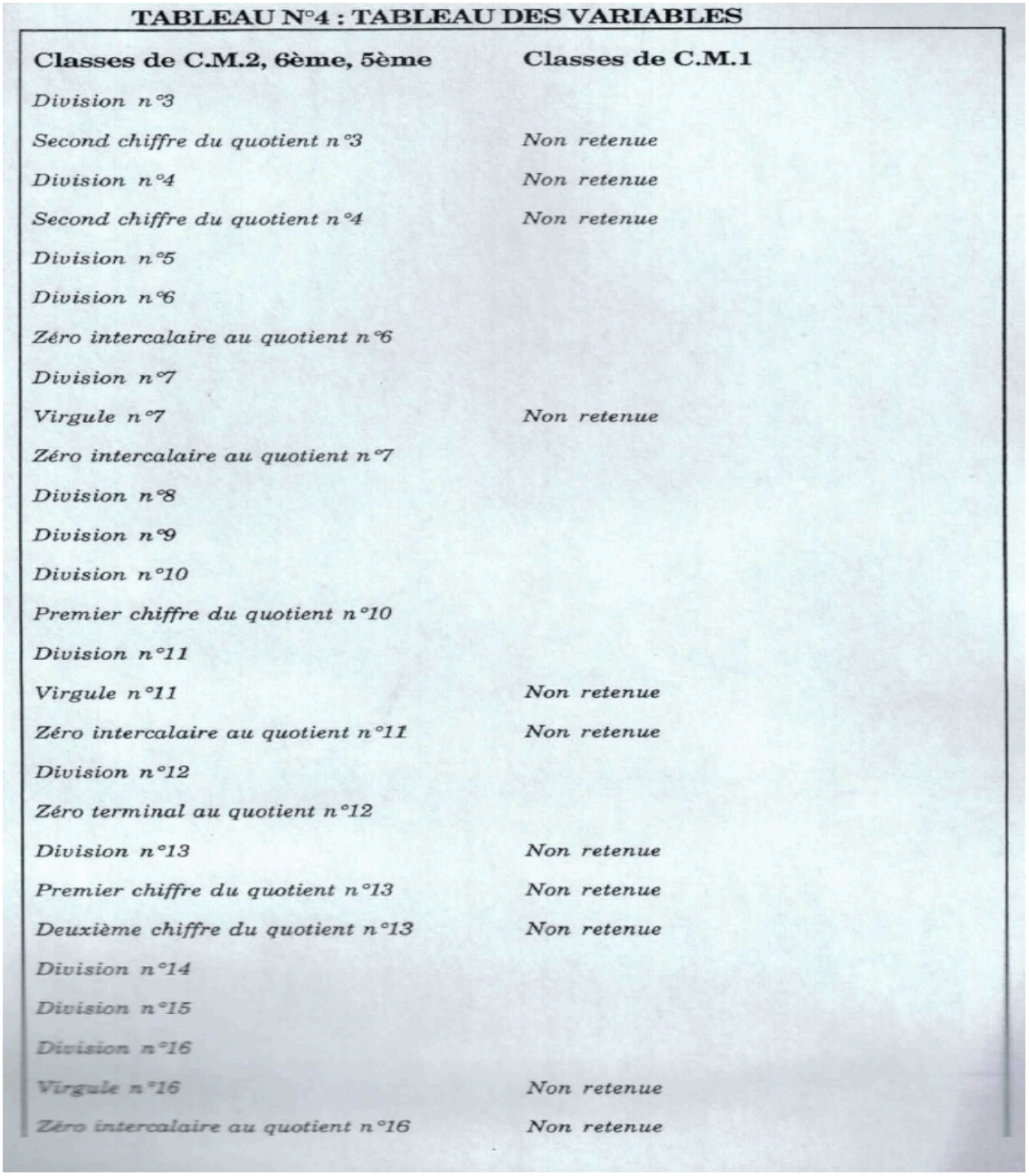


TABLEAU N°4 : TABLEAU DES VARIABLES

Classes de C.M.2, 6ème, 5ème	Classes de C.M.1
Division n°3	
Second chiffre du quotient n°3	*Non retenue*
Division n°4	*Non retenue*
Second chiffre du quotient n°4	*Non retenue*
Division n°5	
Division n°6	
Zéro intercalaire au quotient n°6	
Division n°7	
Virgule n°7	*Non retenue*
Zéro intercalaire au quotient n°7	
Division n°8	
Division n°9	
Division n°10	
Premier chiffre du quotient n°10	
Division n°11	
Virgule n°11	*Non retenue*
Zéro intercalaire au quotient n°11	*Non retenue*
Division n°12	
Zéro terminal au quotient n°12	
Division n°13	*Non retenue*
Premier chiffre du quotient n°13	*Non retenue*
Deuxième chiffre du quotient n°13	*Non retenue*
Division n°14	
Division n°15	
Division n°16	
Virgule n°16	*Non retenue*
Zéro intercalaire au quotient n°16	*Non retenue*

TABLEAU N°4 : TABLEAU DES VARIABLES

CHAPITRE II : ANALYSES HIERARCHIQUES

1- ANALYSE DES QUATRE NIVEAUX C.M.1, C.M.2, SIXIEME, CINQUIEME POUR LES REUSSITES ET LES ECHECS DES 26 DIVISIONS (ECHANTILLON DE 200 SUJETS)

1-1 - Analyse hiérarchique des similarités

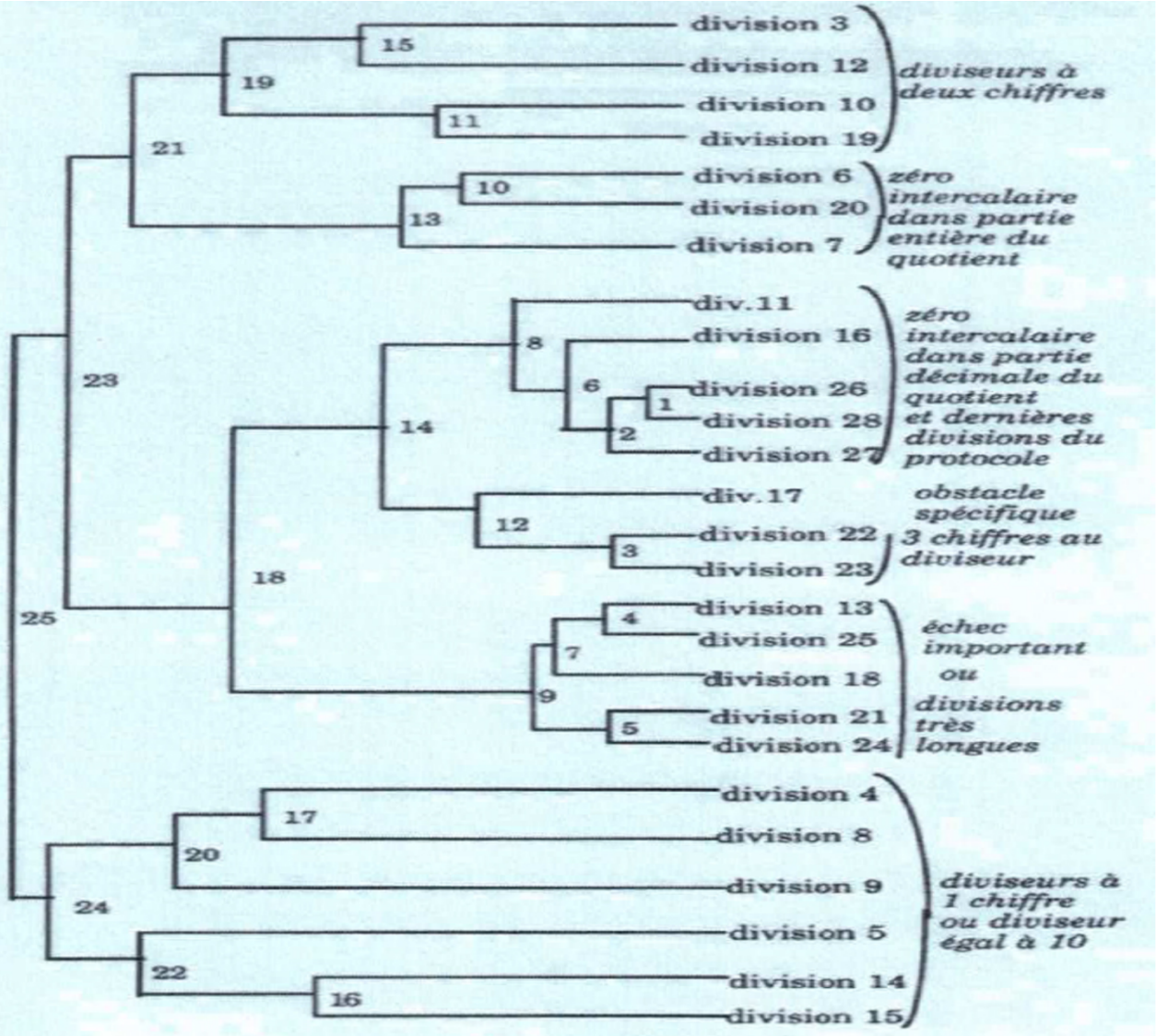
Rappelons que cette analyse permet de repérer les classes de variables constituées selon le principe des similarités. Sont regroupées dans la même classe les variables dont les comportements des élèves permettent de définir la ressemblance. Un algorithme rassemble les variables en classes successives de plus en plus larges, selon une mesure de similarité dont la valeur ne peut que décroître au fur et à mesure que s'étendent les classes. Les variables retenues concernent les divisions numéros 3 à 28, les deux premières divisions n'ayant pas été retenues en raison de leur taux élevé de réussite. Rappelons que ces méthodes hiérarchiques présentent un inconvénient dont pâtit quelquefois l'analyste : le processus de chaînage qui assemble à un degré élevé des variables dont la ressemblance ne s'accompagne pas toujours de la transitivité. Cet inconvénient peut expliquer l'incongruité du rapprochement de variables qui s'opposent sémantiquement.

Cette analyse hiérarchique restitue, tout le long de l'arbre, le maximum de l'information délivrée par les réussites (ou les échecs) aux divers items. En effet, une statistique permet de condenser cet arbre brut à ses niveaux les plus significatifs pour le critère de classification.

Cet "arbre" nous révèle à quels niveaux se produisent les regroupements les plus consistants. Cette partition devient plus grossière quand le niveau s'élève, c'est à dire quand l'indice de similarité décroît. L'indice le plus grand est défini au niveau n°1. Les niveaux sont numérotés (voir arbre hiérarchique des similarités page suivante).

Le lien numéro 1 relie les divisions n°26 et n°28 ; le lien numéro 2 relie celles-ci à la division n°27. Ce lien sélectionne comme parenté la longueur et la complexité des dernières divisions du protocole, c'est à dire celles qui ont plus de quatre chiffres au dividende, et trois au moins au diviseur. Dans la même "branche" de l'arbre, une sous-catégorie apparie les divisions n°16 et n°11, qui comportent toutes deux un zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient. Une deuxième sous-catégorie couple les divisions n°17, n°22 et n°23. Il s'agit des premiers diviseurs à trois chiffres dans l'ordre du protocole, et de la division n°17, qui a un taux élevé d'échec, malgré un diviseur égal à dix. On ne pouvait pas prévoir a priori que la division n°17 se regrouperait avec les divisions n°22 et n°23, à ce niveau. L'ensemble de cette première "branche" (lien n°14) comporte les obstacles suivants : les divisions sont longues, ou ont un zéro intercalaire au quotient dans la partie décimale.

Le lien numéro 4 rassemble les divisions n°13 et n°25, dont les quotients ont pour caractéristique commune de ne pas "tomber juste". Ces divisions se regroupent avec la division n°18 (zéro terminal à reporter au quotient), puis avec les divisions n°21 et n°24 qui requièrent une certaine longueur de calcul. L'ensemble ici représenté (lien n°9) représente des opérations comportant toutes des obstacles spécifiques dans le calcul.



ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

DES QUATRE NIVEAUX SCOLAIRES

Le lien numéro 15 relie les divisions n°3 et n°12, et le lien numéro11 les divisions n°10 et n°19. Ce sont toutes des divisions relativement courtes (lien n°19).

Les liens numéros 10 et 13 regroupent les divisions n°6 et n°20, puis n°7, qui possèdent un zéro intercalaire ou terminal dans la partie entière du quotient. L'ensemble représenté par les liens numéros 19 et 13 (lien n°21) rassemble les divisions courtes et les divisions avec un zéro intercalaire ou terminal dans la partie entière du quotient.

Les liens numéros 17 et 20 rassemblent les divisions n°4 et n°8, puis n°9. Les quotients ne "tombent pas juste" (un seul chiffre au diviseur.) Bien que la division n°4 comporte un dividende inférieur au diviseur, elle se regroupe avec des divisions relativement bien réussies. Les liens numéros 16 et 22 regroupent les divisions n°14, n°15, et n°5 dont la caractéristique principale est la divisibilité par 5 ou 10. L'ensemble représenté par le lien n°24, regroupe les divisions dont le diviseur est égal à 10 ou est composé d'un seul chiffre.

Certains schèmes révèlent ici leur fragilité pour les divisions dont le dividende d'étape est inférieur au diviseur ; cette caractéristique perturbe les conceptions du sujet. De même, les divisions qui "ne se terminent pas" heurtent l'anticipation que l'enfant peut effectuer pour l'obtention du résultat. En ce cas, le schème "partager" se prête à des inférences : l'enfant "s'arrange" pour terminer le calcul avec un modèle plus simple (qui en ce cas se traduit par une erreur). Le schème consistant à poser un zéro au quotient engendre des actions différentes, en fonction de sa position au quotient : soit au début (premier chiffre du quotient), soit intercalaire (après ou avant une virgule), ou encore terminal.

1-2 Analyse hiérarchique des implications entre variables

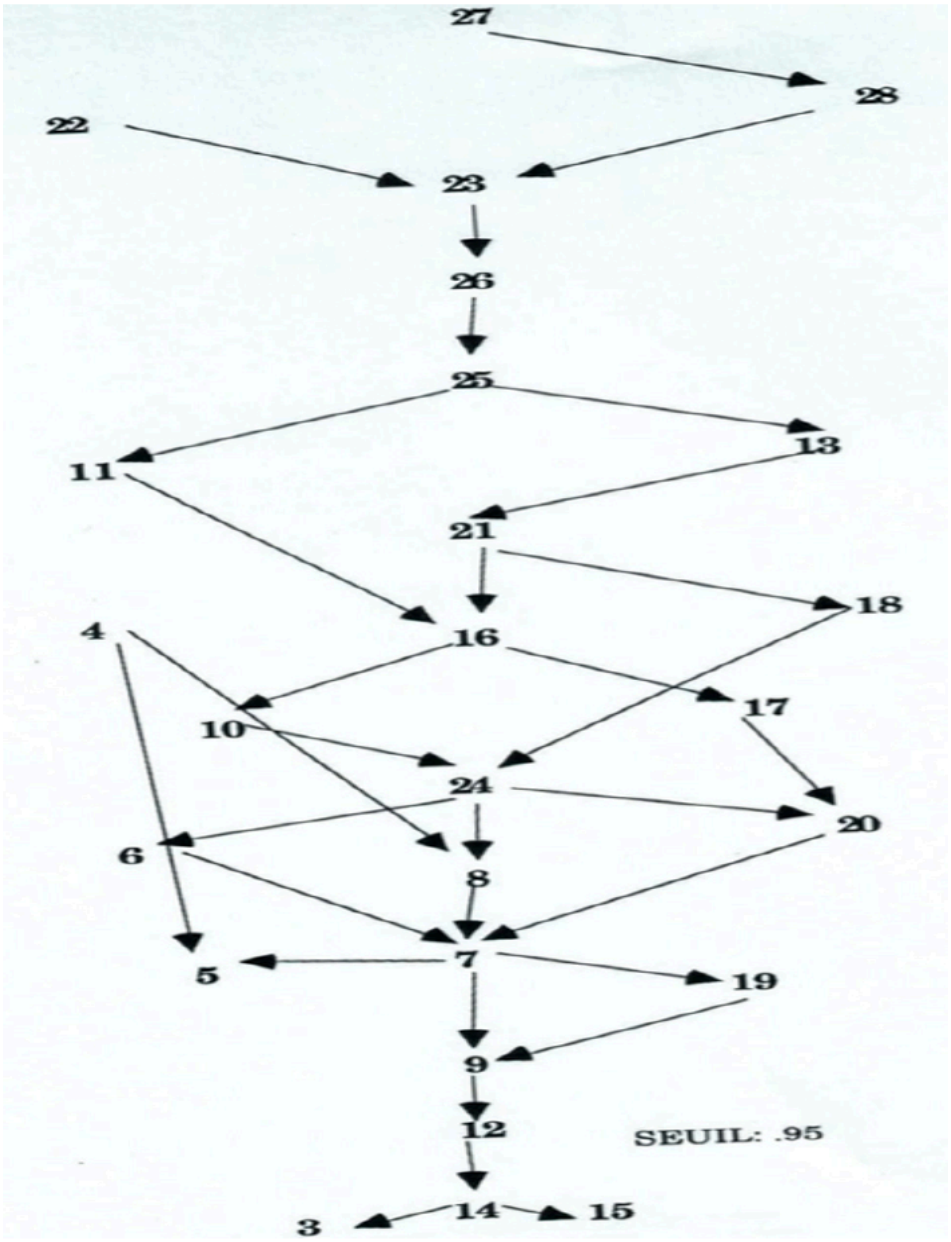
Rappelons que l'analyse consiste à mesurer l'implication statistique entre un attribut a sur un attribut b. Le long du même chemin, les items s'inscrivent dans l'ordre décroissant de difficulté. Le graphe ci-après donne une représentation de l'ensemble des relations implicatives les plus fortes (seuil choisi .95), entre les différents items du protocole.

Ce seuil (.95) retenu est exceptionnellement élevé. Chacun des chemins du graphe décrit une sorte de genèse. Par exemple, la réussite à la division n°27 précède et annonce la réussite à la division n°28, et aux suivantes. C'est un signe précurseur et annonciateur des comportements liés à l'exécution de ces divisions.

Cette présentation d'ensemble permet de discerner les principales implications. Nous analyserons plus loin des graphes d'implication plus détaillés. Pour l'instant, nous allons examiner les relations au sein de la même classe hiérarchique, et discerner ce que traduit la cohésion implicative orientée. **Cette cohésion tient le plus probablement aux procédures utilisées par les élèves et à leur filiation.**

Prenons la première partie du graphe (27-->28 et 22-->23-->26-->25): elle est constituée des divisions les plus longues, et notamment de plusieurs divisions dont le dividende est inférieur

au diviseur. Le niveau de réussite est très bas, les schèmes utilisés par les élèves conduisent le plus souvent à l'échec, notamment lorsque le diviseur est plus grand que le dividende d'étape.



ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

DES QUATRE NIVEAUX SCOLAIRES

Pour établir les chaînes que nous allons commenter maintenant, nous avons abaissé le seuil

de .95 à .86, ce qui est parfaitement acceptable, selon les spécialistes de la méthode.

Les filiations suivantes (11-.95-->16-.95-->17 et 13-.95-->21-.95-->16) s'organisent autour de difficultés très différentes. La première concerne la présence d'un zéro dans un quotient décimal, quand le calcul requiert de poursuivre après la virgule en "créant" un zéro au dividende d'étape (divisions n°11 et n°16); la division n°17 (504 ÷ 10 = 50,4), représente une difficulté spécifique sur laquelle nous reviendrons.

La deuxième filiation concerne deux divisions dont le dividende d'étape est inférieur au diviseur (n°13 et n°16). On voit que toutes les divisions comportant un diviseur supérieur au dividende font l'objet d'une chaîne implicative :

27---.88-->22---.81-->13---.77-->4.

Dans la plupart des cas, et nous reviendrons sur ce point, **certains élèves veulent produire un résultat, sans respecter l'ordre de grandeur.** Par ailleurs, les élèves qui réussissent les divisions les plus difficiles (en haut du graphe), manifestent une grande maîtrise de l'algorithme, y compris le contrôle de l'ordre de grandeur.

En descendant le graphe dans l'ordre décroissant des difficultés, on trouve de manière un peu surprenante, une filiation entre la division 10, qui demande le chiffre "1" comme premier chiffre du quotient, et la division n°24 qui demande la suppression d'un zéro au dividende et au diviseur et qui, en outre, ne se termine pas (4600 ÷ 60 = 76, 6666...). Par ailleurs, la filiation entre les divisions numéros 17, 20, et 7 peut s'expliquer aisément par la présence d'un zéro dans la partie entière du quotient. De même, la division n°19 et la division n°12 demandent toutes deux le report d'un zéro à la fin du quotient. L'ensemble de la chaîne représentée respectivement par les divisions numéros 11, 16, 17, 20, 7, 19, 12, traduit le problème suivant : l'anticipation du sujet ne peut pas se faire quand il rencontre un zéro au quotient, car cela ne correspond pas à sa représentation de la division

Les divisions les plus réussies, situées en fin de graphe hiérarchisent le nombre de chiffres composant le diviseur. Les plus faciles sont des divisions par 5, par 10, ou par un nombre à un chiffre. N'oublions pas cependant que certaines divisions par 10 ou par un nombre à un chiffre sont loin d'être aisées (n°17 et n°4): des difficultés encore une fois liées au zéro au quotient engendrent des échecs. Le schème de la division par 5 ou 10 se généralise, une fois acquis, à des divisions plus facilement modélisées que celles concernant le zéro au quotient.

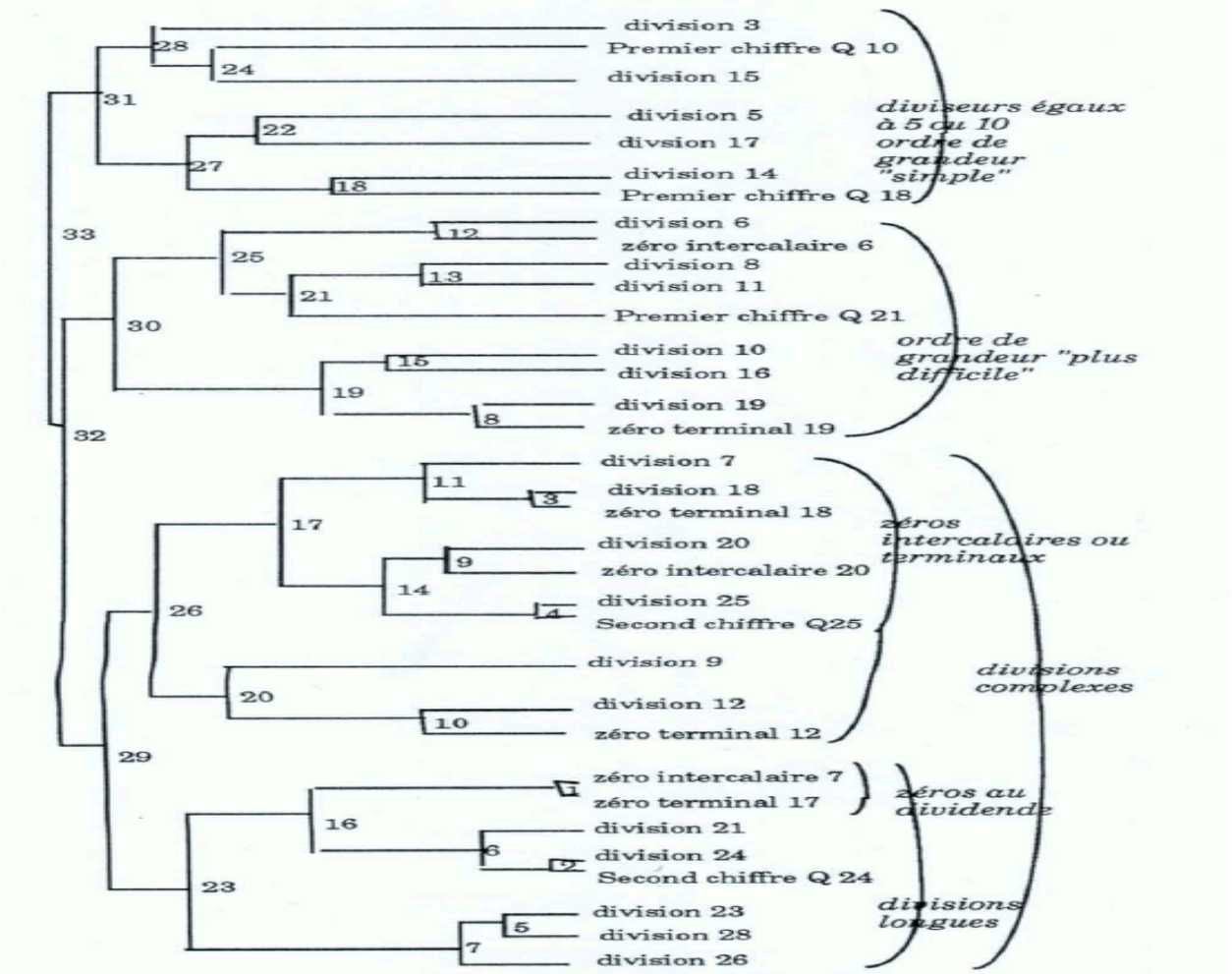
2- ANALYSE PRINCIPALE

2-1 Analyse hiérarchique des similarités

2-1-1 Classe de C.M.1

Notre intention est, maintenant, de contribuer à bâtir une typologie des ressemblances pour les différentes divisions et leurs caractéristiques, niveau scolaire par niveau scolaire. Cette analyse s'impose tout particulièrement pour le C.M.1, puisque nous avons retenu, pour ce niveau scolaire, une partie seulement des divisions et une partie des variables (voir le tableau des variables n°4, chapitre 3-2).

Pour les 34 variables retenues, l'analyse hiérarchique dégage 33 niveaux (Arbre Hiérarchique des similarités de la classe de C.M.1, ci-dessous). Deux super-classes constituées des niveaux 31 et 32 apparaissent (page suivante) :

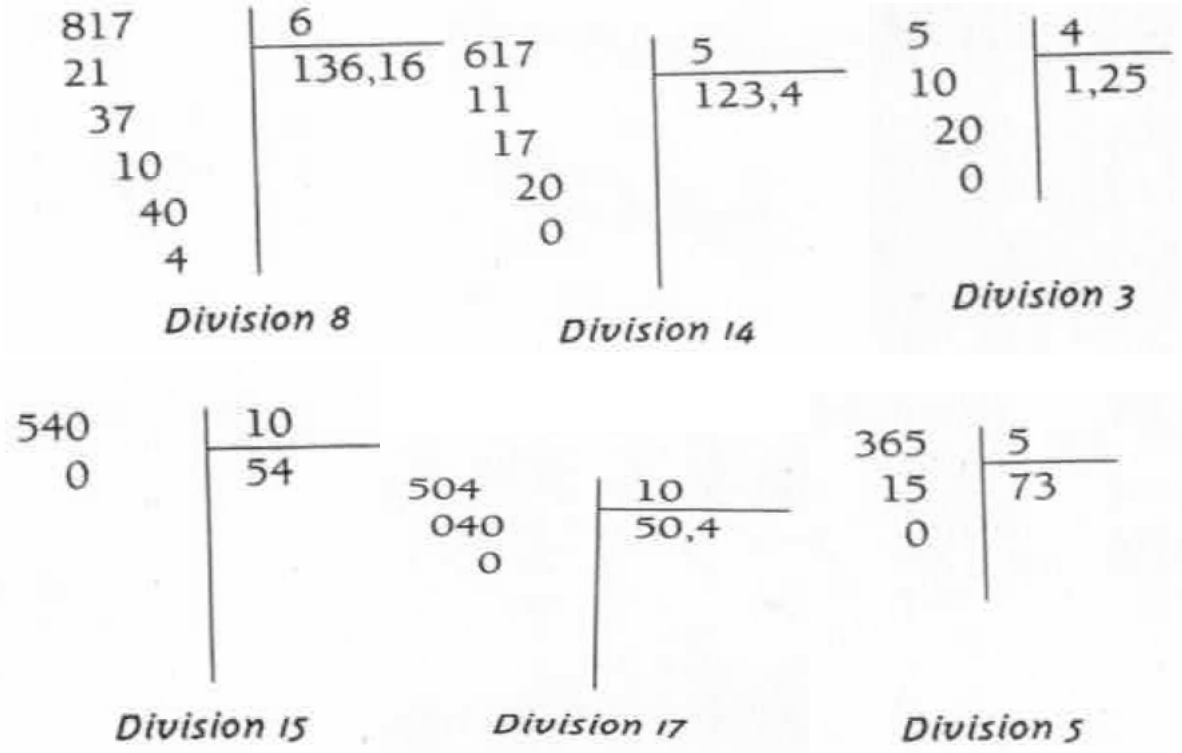


Légende : Q : quotient

ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

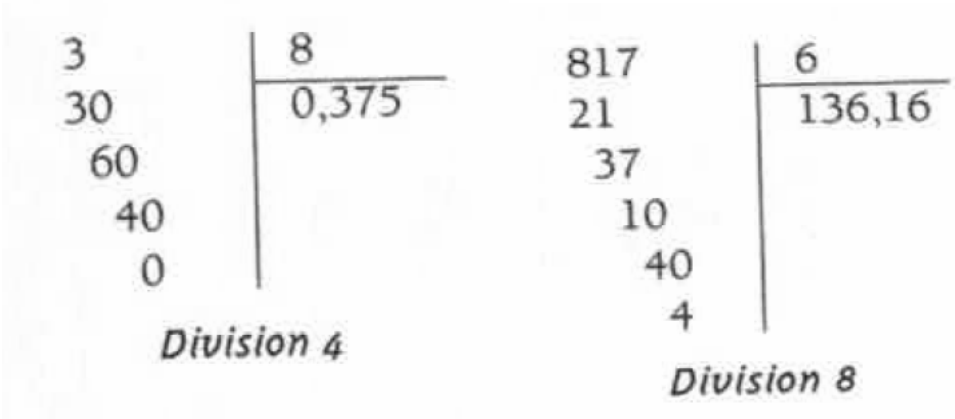
NIVEAU SCOLAIRE : CM1

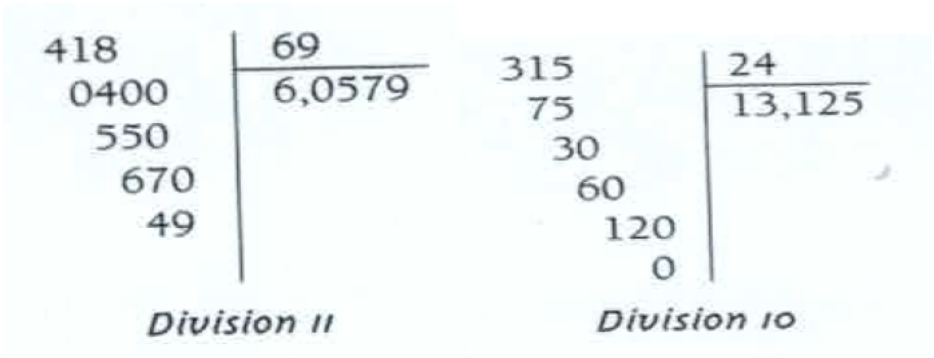
Une première super-classe (niveau 31) regroupe les divisions dont les diviseurs sont égaux à 5 ou 10 (sauf la division n°3). En outre, le calcul du premier chiffre du quotient demande de considérer **le même nombre de chiffres au dividende qu'au diviseur**.

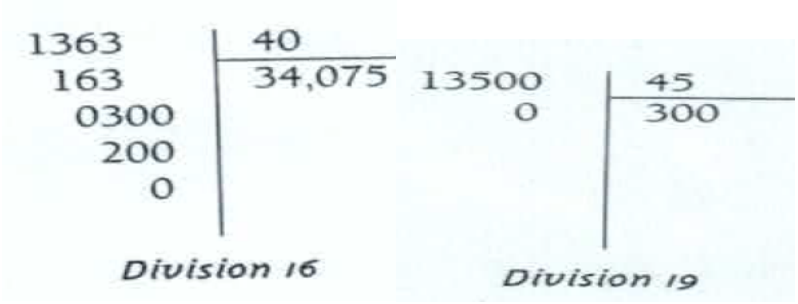


Une deuxième super-classe (niveau 32) rassemble deux sous-classes (niveaux 29 et 30).

-La première (niveau 30) se compose des divisions n°6, n°8, n°11, n°10, n°16 et n°19. **Le nombre de chiffres à prendre en considération au dividende, est presque toujours supérieur au nombre de chiffres du diviseur,** (sauf pour la division n°8 et la division n°10). Le système de représentation du sujet pour l'estimation du premier chiffre du quotient suit en général le schème et les règles d'action du sujet, consistant à "prendre" le même nombre de chiffres au dividende et au diviseur. L'application du schème se heurte ici aux caractéristiques de la division.



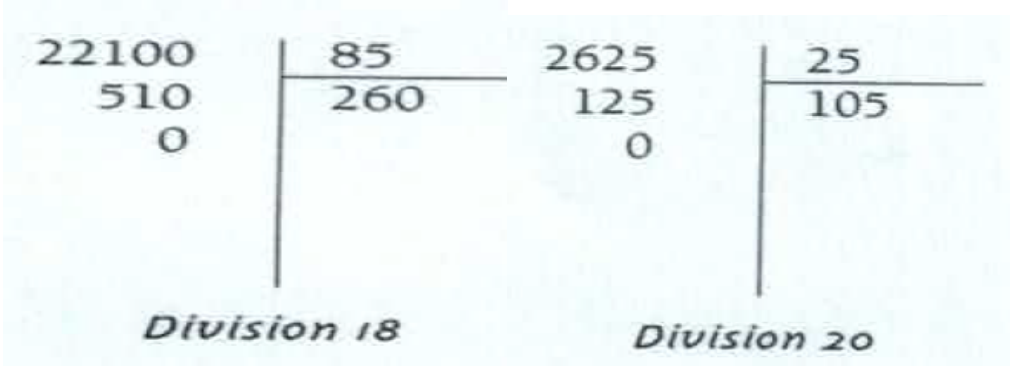


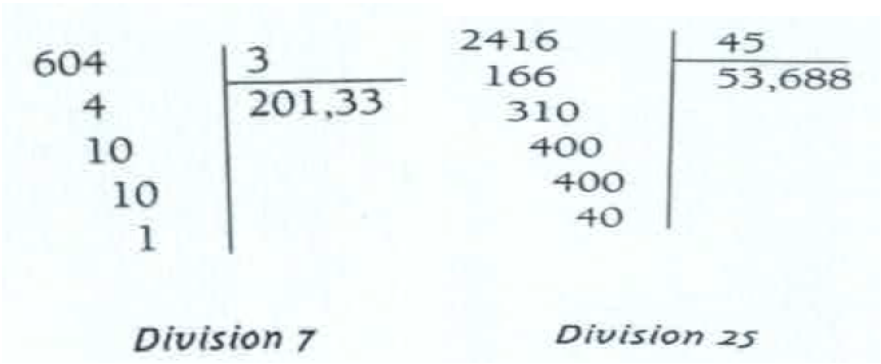


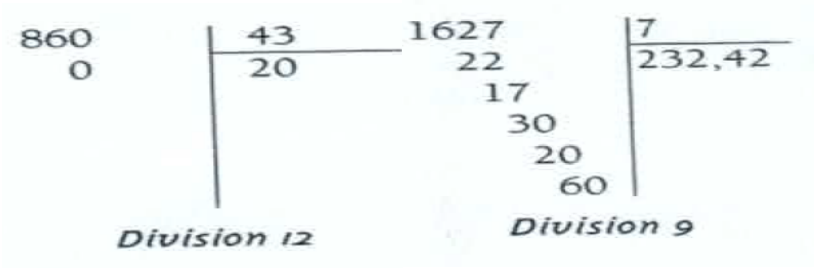
La deuxième sous-classe (niveau 29) est composée des **divisions complexes et longues**, et de celles ayant un zéro au quotient. Elle se divise aux niveaux 26 et 23 :

Le niveau 26 s'organise autour des divisions n°7, n°18, n°20, n°25, qui comportent un zéro intercalaire ou terminal au quotient ; et le diviseur est en général muni de deux chiffres.

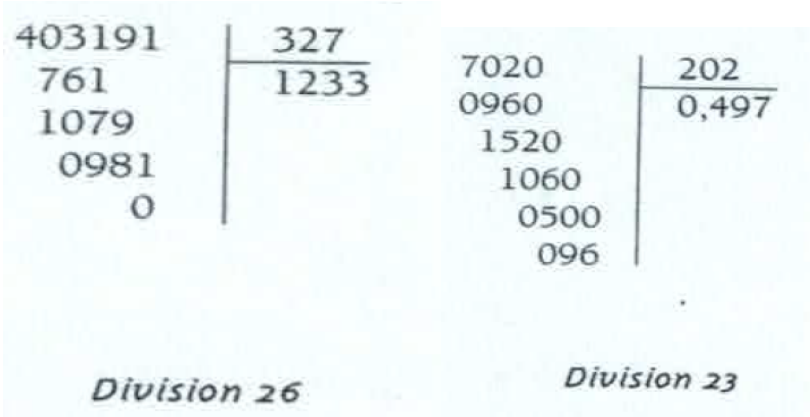
Ce même niveau unit les divisions n°9 et n°12. Pour les élèves de C.M.1, **la présence du zéro terminal paraît ainsi soulever une difficulté du même ordre qu'une division longue, (trois chiffres au moins au quotient).**

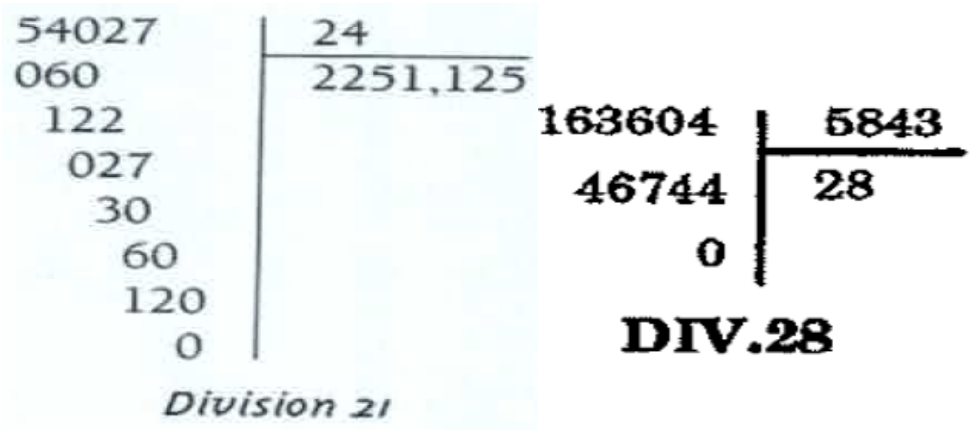






Le niveau 23 regroupe les divisions n°21, n°24, n°23, n°26, n°28, d'une part, et d'autre part, le zéro intercalaire de la division n°7 et le zéro terminal de la division n°17. Le critère commun supplémentaire à ces deux dernières divisions est le zéro intercalaire au dividende. L'enfant va devoir étendre le contrôle du calcul à cette double présence du zéro. **Sa résistance est grande** : l'adaptation du schème employé par l'enfant le conduira à abandonner le zéro au quotient. **Par ailleurs, la difficulté des divisions longues est similaire à celle rencontrée quand le dividende possède un zéro intercalaire.**





En résumé, quatre points se dégagent pour la classe de cours moyen première année :

-la divisibilité par 5 ou 10, lorsque le nombre de chiffres à considérer au dividende est égal à ceux du diviseur ;

-l'évaluation de l'ordre de grandeur initial du premier chiffre du quotient, quand le nombre de chiffres du dividende à envisager pour commencer le calcul est supérieur à celui du diviseur ;

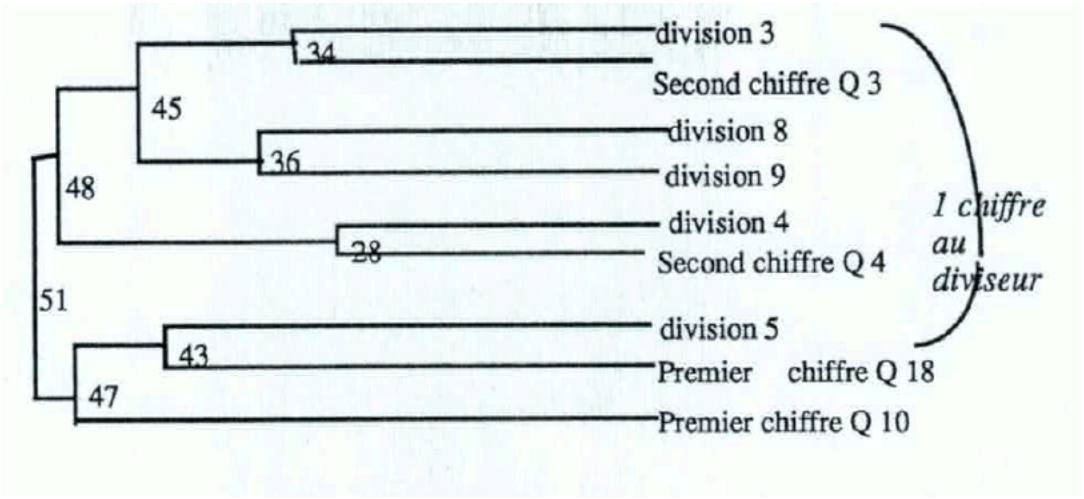
-la difficulté des divisions comportant un zéro terminal ou intercalaire au quotient ;

-et celle des divisions longues (au moins trois chiffres au quotient), ou des divisions possédant un zéro intercalaire au dividende.

2-1-2 Classes de C.M.2, sixième, cinquième

Pour l'analyse des résultats des classes de cours moyen deuxième année, de sixième, et de cinquième, toutes les variables sont retenues (tableau n°2, chapitre 3-2).

Deux grandes classes sont formées avec 53 niveaux : la classe composée du niveau 51, et celle composée du niveau 52.



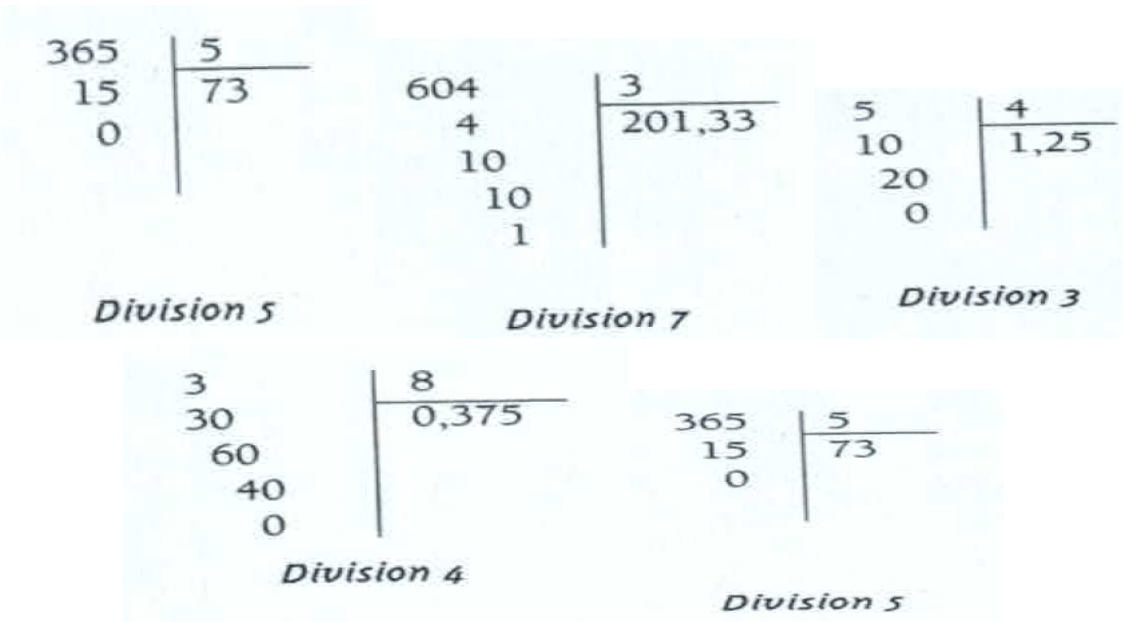
Légende : Q : Quotient

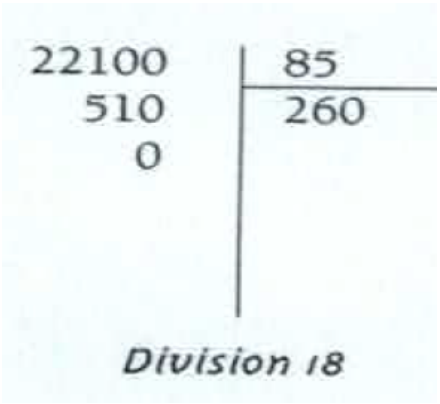
ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES :

PREMIERE GRANDE CLASSE

NIVEAUX SCOLAIRES C.M.2, 6ème et 5ème

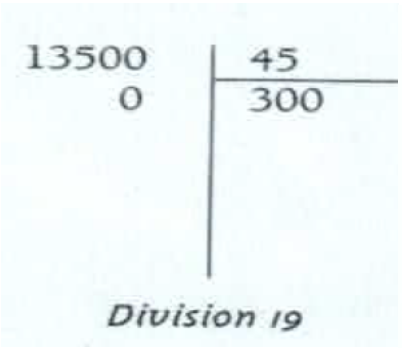
La classe des divisions simples (niveau 51), regroupe les divisions n°3, n°5, n°8 et n°9 comportant **un chiffre au diviseur**.

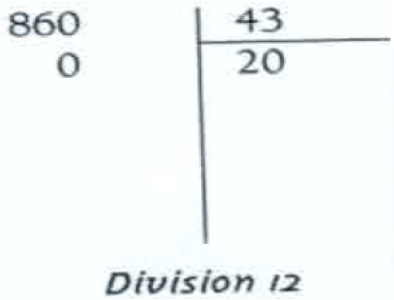


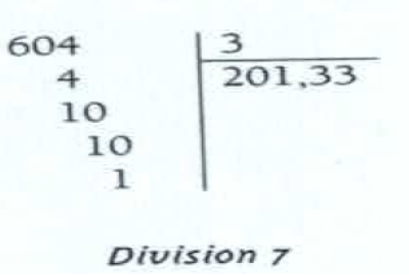


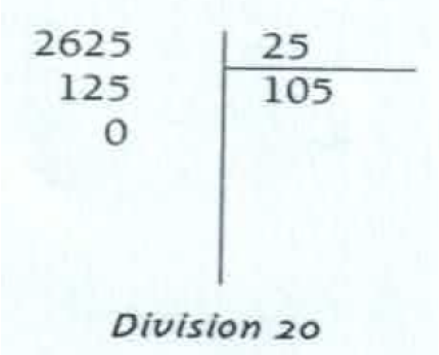
L'autre classe, très large, regroupe les autres divisions (niveau 52) dans les trois sous-classes suivantes :

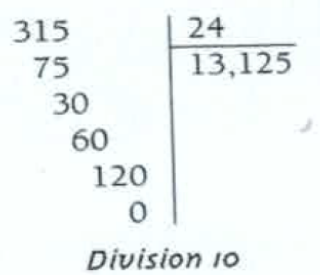
-une sous-classe (niveau 49) de divisions comportant **un zéro dans la partie entière du quotient**, soit terminal (divisions n°12, n°19), soit intercalé (n°6, n°7, n°20).

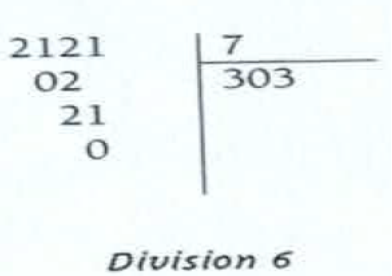


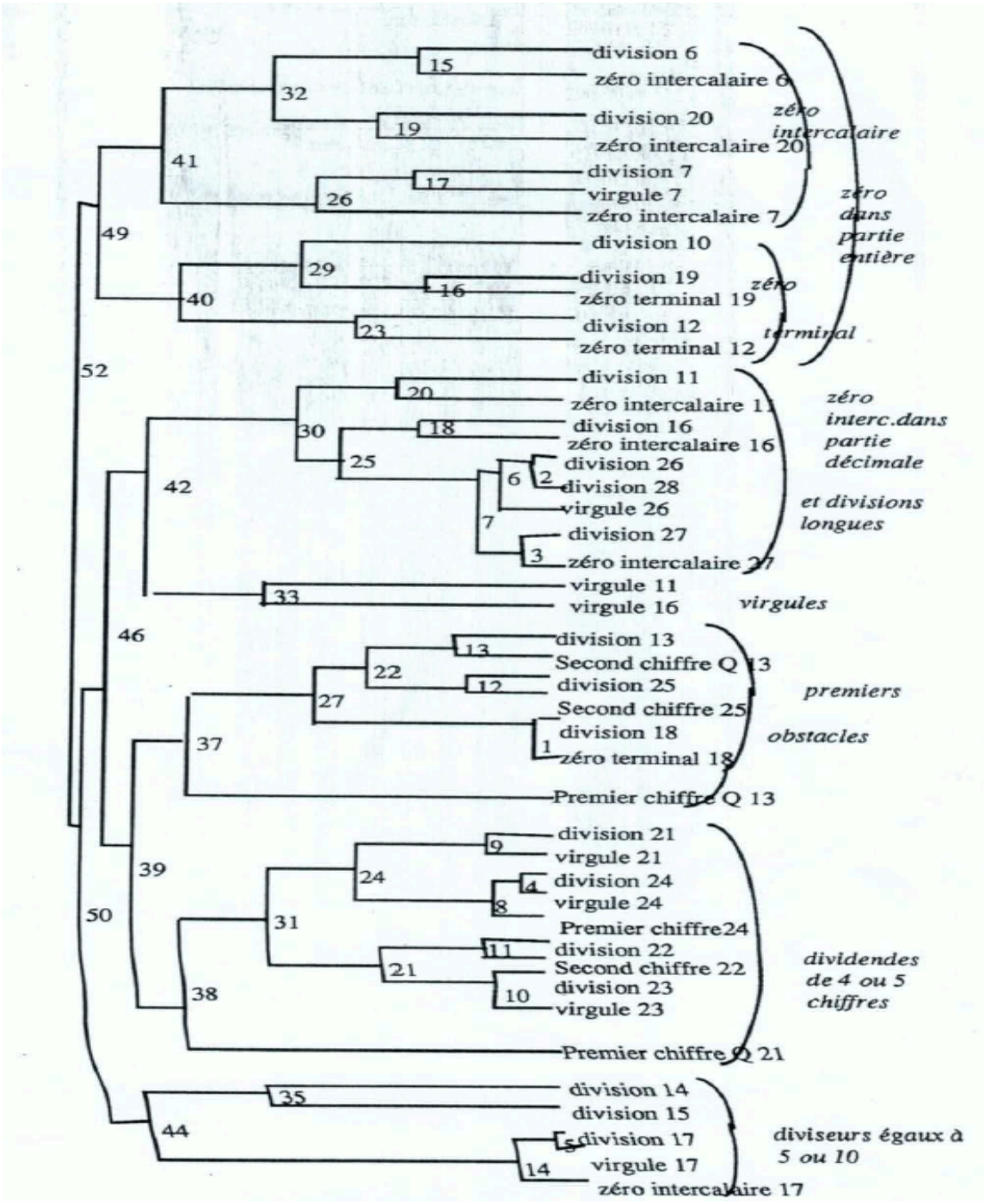












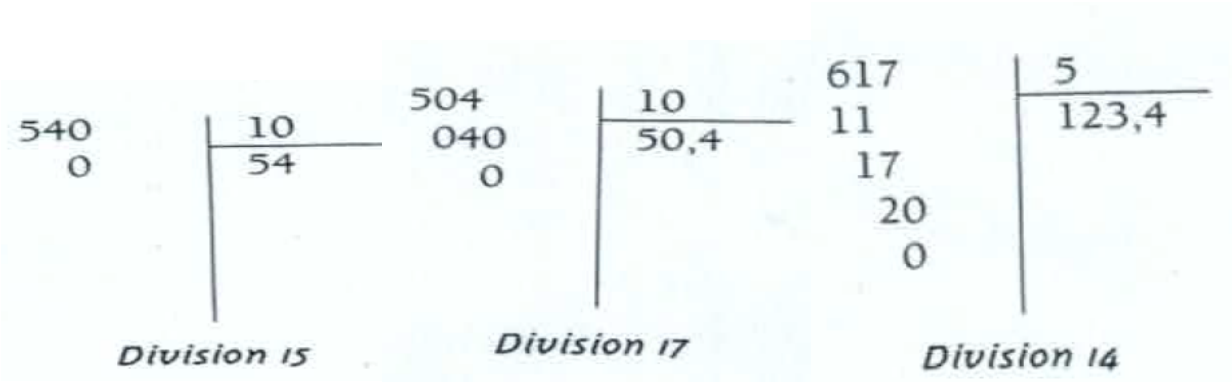
Légende : Q :Quotient

ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES :

SECONDE GRANDE CLASSE

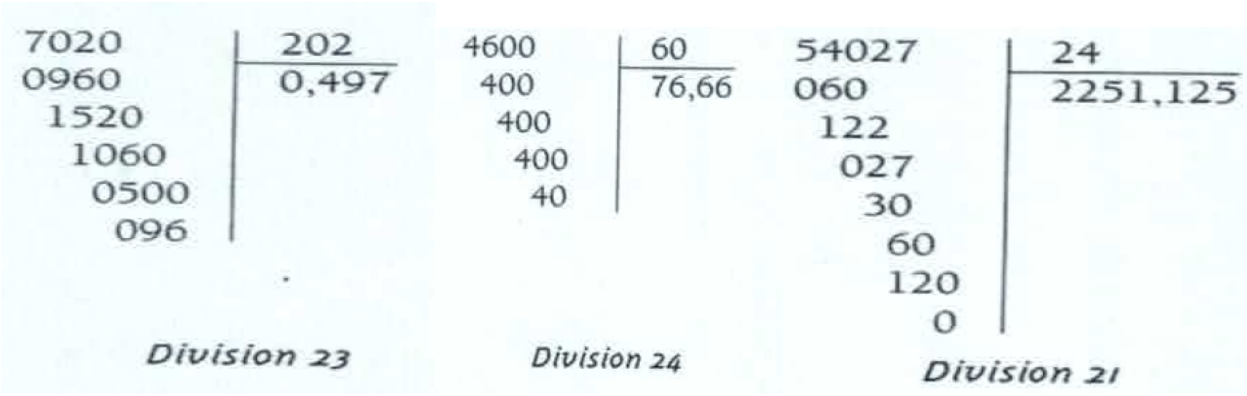
NIVEAUX SCOLAIRES C.M.2, 6ème et 5ème

-une sous-classe (44) de divisions dont le diviseur est 5 ou 10 : divisions n°14, n°15, n°17.

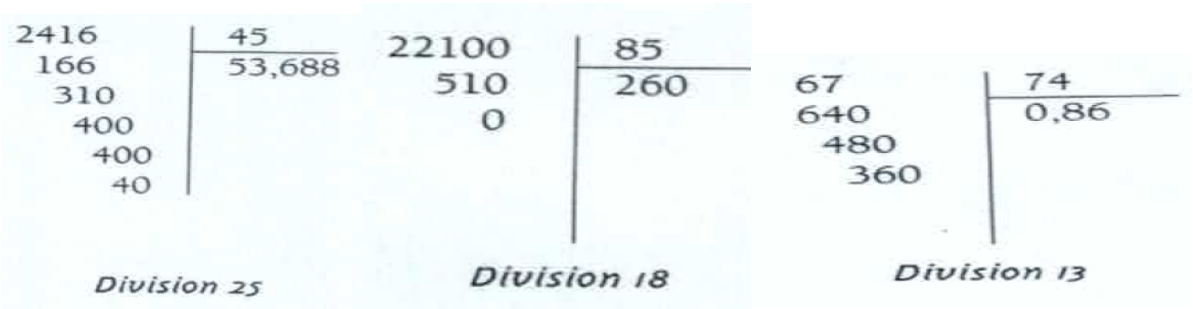


-une sous-classe de divisions longues et complexes (niveau 46) se subdivisant elle-même en trois autres sous-groupes :

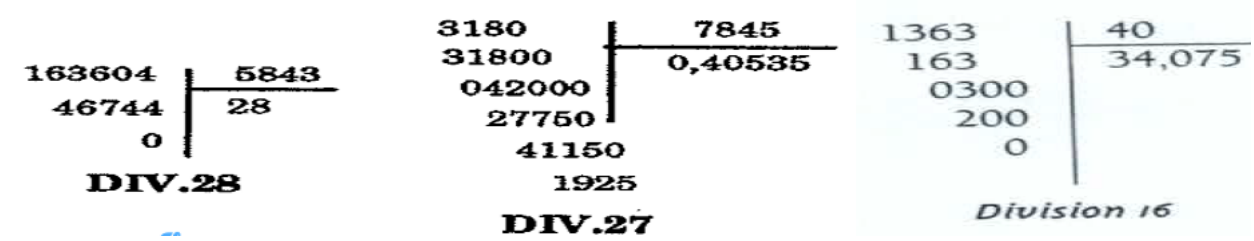
-le sous-groupe des divisions longues (niveau 38), comportant un dividende à 4 ou 5 chiffres : (divisions n°21, n°23, n°24); auquel se joint le cas particulier de la division n°22, dont le dividende (à 3 chiffres), est inférieur au diviseur;

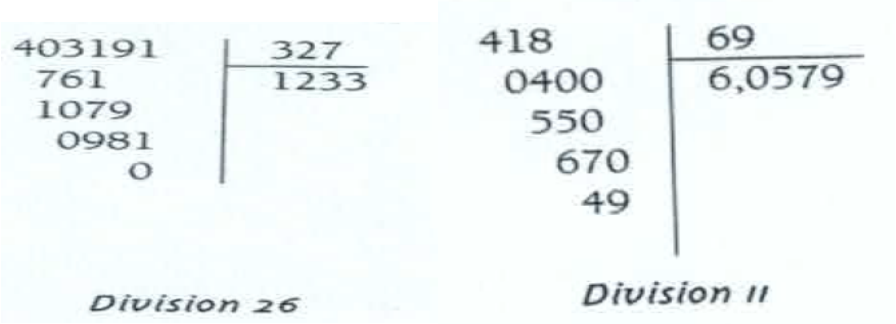


-le sous-groupe des divisions comportant des particularités (niveau 37), telles la division n°13, dont le dividende est inférieur au diviseur et qui représente la première grande difficulté rencontrée par les élèves dans l'ordre de passation du protocole, la division n° 18, avec un dividende à 5 chiffres qui apparaît pour la première fois dans l'épreuve, la division n°25 enfin, qui présente la caractère particulier qu'il faut considérer un nombre de chiffres du dividende supérieur au nombre de chiffres du diviseur pour effectuer le calcul. La relation entre différents schèmes devient conceptuellement complexe, quand il faut les associer, les combiner. Ceci s'accompagne de la résistance qu'opposent des situations nouvelles telles un dividende inférieur au diviseur, le report d'un zéro terminal au quotient, ou l'évaluation du premier chiffre du quotient. **Ces phénomènes sont ici particulièrement résistants, et deviennent des obstacles importants.**



-le sous-groupe des divisions complexes et longues (niveau 42) avec un dividende ayant au moins 4 chiffres, et un diviseur ayant au moins 3 chiffres : (divisions n°26, n°28), auquel se joint le cas de la division n° 27 dont le dividende à 4 chiffres est inférieur au diviseur; et les divisions n°11 et n°16 qui comportent un zéro intercalaire après la virgule du quotient.





En résumé, pour les trois niveaux scolaires C.M.2, sixième et cinquième pris ensemble, on distingue comme caractéristiques susceptibles d'entraîner des différences :

-le zéro dans la partie entière du quotient,

-la divisibilité par 5 ou 10,

-la division par un diviseur de quatre chiffres au moins,

-les divisions complexes et longues.

-certaines "particularités" représentées par les divisions n°13, n°18, n°25.

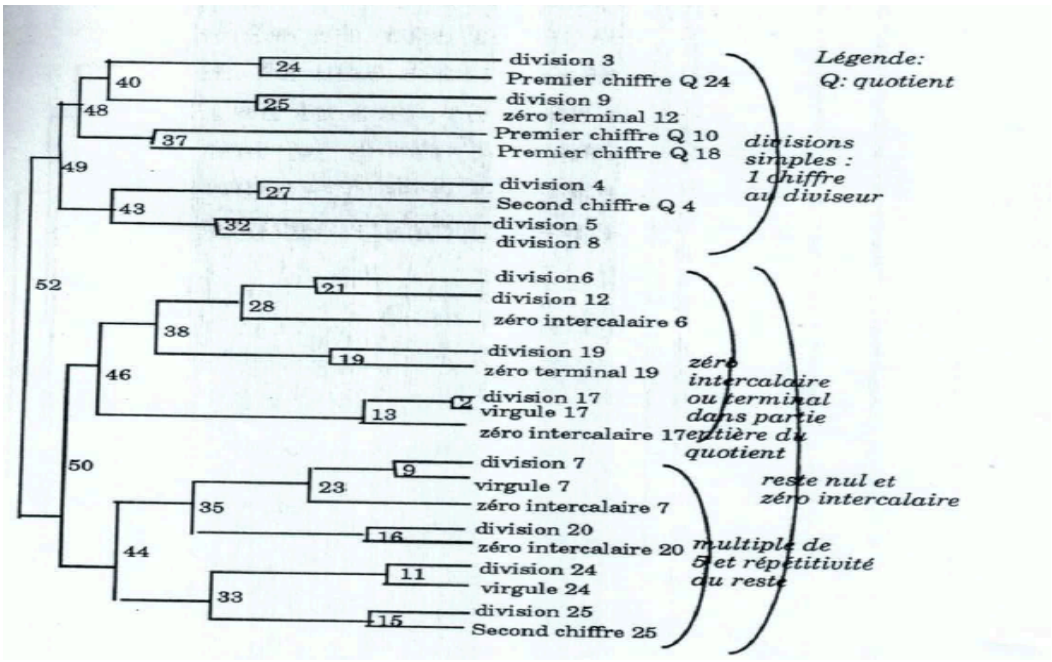
2-1-3 Description et étude comparative de chacun des trois niveaux C.M..2, sixième et cinquième, séparément.

Nous allons maintenant souligner les différences et les caractéristiques principales de chacune des classes de C.M.2, de sixième, et de cinquième, en les étudiant comparativement avec l'arbre composé des trois niveaux réunis, que nous appellerons pour la circonstance, "arbre commun".

2-1-3-1 Classe de C.M.2

53 niveaux sont obtenus. Deux super-classes émergent : celle formée au niveau 52 et celle au niveau 51 (voir les deux graphes pages suivantes). Deux sous-classes composent le niveau 52 (49 et 50). La classe 49 est constituée de divisions simples (n°4, n°5, n°8, n°9), le diviseur étant composé d'un seul chiffre. Cette même classe se retrouve dans l'arbre commun.

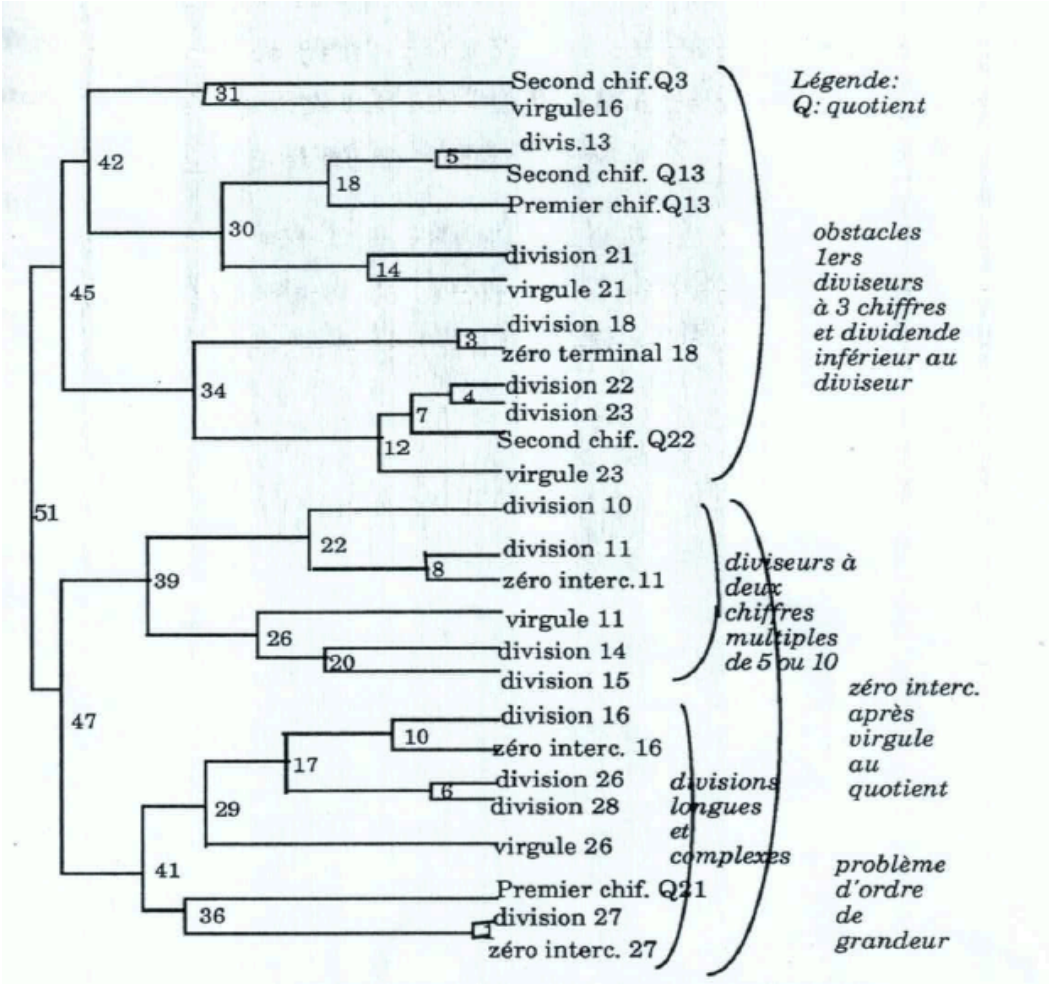
La classe 50 est composée de la sous-classe 46, comprenant les divisions n°6, n°12, n°19, n°17 et de la sous-classe 44, composée des divisions n°7, n°20, n°24, n°25. Pour la sous-classe 46, nous remarquons la position différente de la division n°17 qui se regroupe assez naturellement, avec les divisions n°6, n°12 et n°19 dont le reste est nul, et qui ont un zéro au quotient.



ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

PREMIERE GRANDE CLASSE : NIVEAU SCOLAIRE : C.M.2

Le regroupement de la division n°7 avec les divisions longues n°20 et 24, est le signe d'une difficulté particulière : le calcul du zéro intercalaire dans la partie entière du quotient ne se calcule pas de la même manière que dans la division n°6, avec laquelle cette division était regroupée dans l'arbre commun. En effet, dans le cas de la division n°7, il faut diviser 0 par 3. Si, dans ces deux cas, on a bien un dividende d'étape inférieur au diviseur, **le zéro au dividende semble compliquer le processus.** De surcroît, l'opération n°7 "ne se termine pas". **Le rôle de la division n°7 se singularise également dans les autres types d'analyse que nous verrons plus loin**.



ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

SECONDE GRANDE CLASSE

NIVEAU SCOLAIRE : C.M.2

La sous-classe 44 regroupe elle aussi des divisions dont le quotient décimal comporte un zéro intercalaire et un diviseur à deux chiffres. Par rapport à ce qui se passe dans l'arbre commun, la division n°24 se distingue, et se regroupe cette fois-ci avec la division n°25 dont le diviseur est

un multiple de 5 et « qui ne se termine pas ».

Concernant l'autre grande classe (niveau 51), on peut constater encore que la sous-classe 45 comporte les divisions n°13 et n°21 (niveau 42), et les divisions n°18, n°22, n°23 (niveau 34), et qu'il n'y a pas de différences avec l'arbre commun. On peut insister néanmoins sur l'interprétation de ce regroupement en termes d'**obstacle** : on retrouve en effet le cas du **dividende inférieur au diviseur** (divisions n°13, et n°22), et celui des **premiers diviseurs à trois chiffres.** On se représente ainsi que ces "nouveautés" font problème pour les élèves, ce qui explique qu'elles donnent lieu à des échecs massifs. La connaissance des tables de multiplication peut probablement intervenir pour la division n°18 (diviseur égal à 85), ainsi que la prise en compte de deux zéros à la fin du dividende.

La sous-classe 47 est composée des niveaux 39 et 41. Le lien entre les divisions n°10 et n°11, qui diffère de l'arbre commun, tient probablement à l'ordre de grandeur du quotient, avec trois chiffres au dividende et deux chiffres au diviseur.

Remarquons enfin que le niveau 41 opère le même regroupement que dans l'arbre commun : divisions n°16, n°26, n°27 et n°28. Les divisions n°16 et n°11 ont un **zéro intercalaire** après la virgule. Les autres divisions ont un **diviseur de trois chiffres au moin.s**

En résumé, au C.M.2, l'analyse hiérarchique discrimine :

-les divisions simples qui ont un chiffre au diviseur,

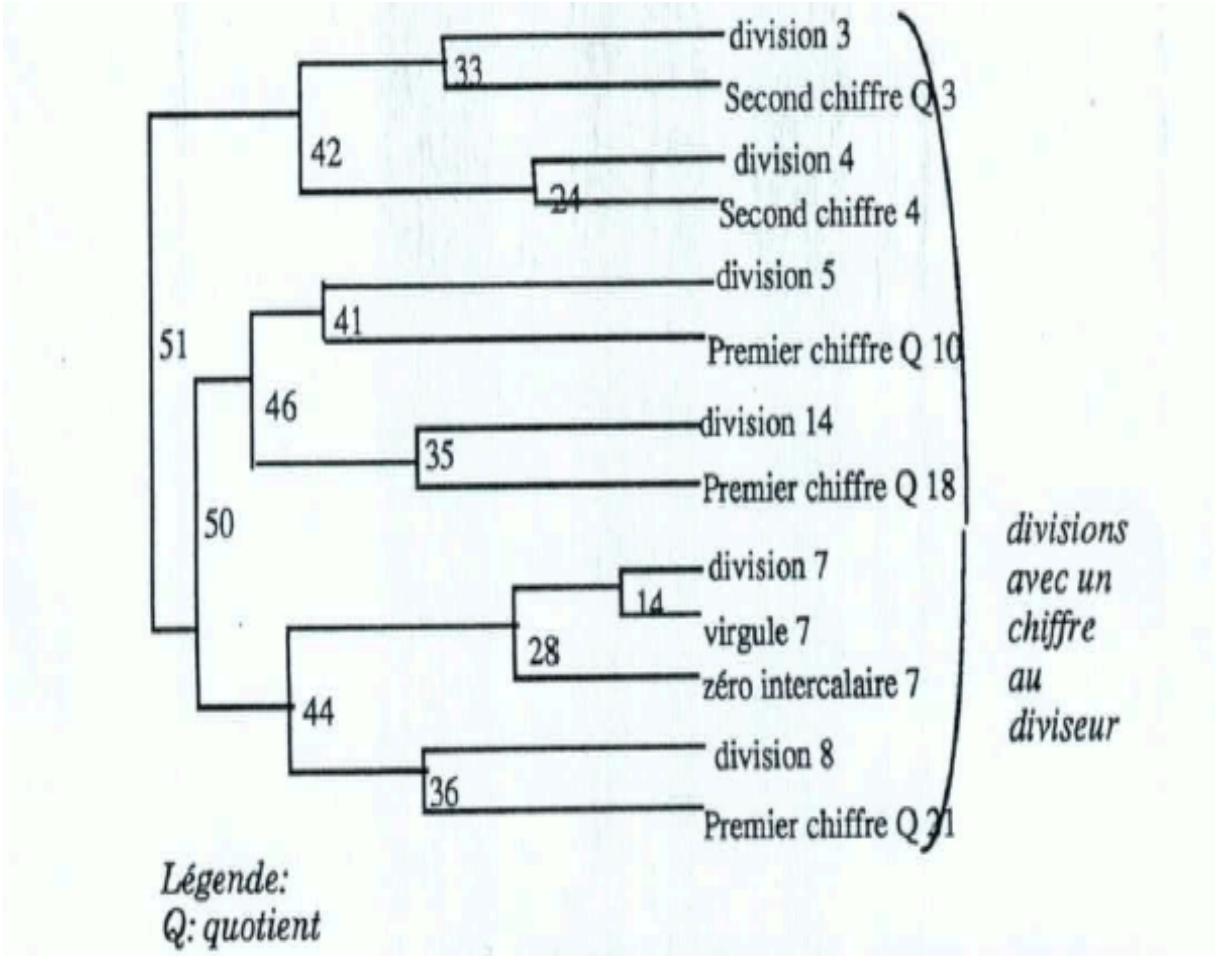
-les divisions ayant un zéro intercalaire ou terminal dans la partie entière du quotient, la répétitivité du reste, et la divisibilité par 5 ou 10,

-les particularités comme les dividendes inférieurs au diviseur, ou encore les premiers diviseurs à trois chiffres,

-les zéros intercalaires des parties décimales des quotients, et les divisions les plus longues.

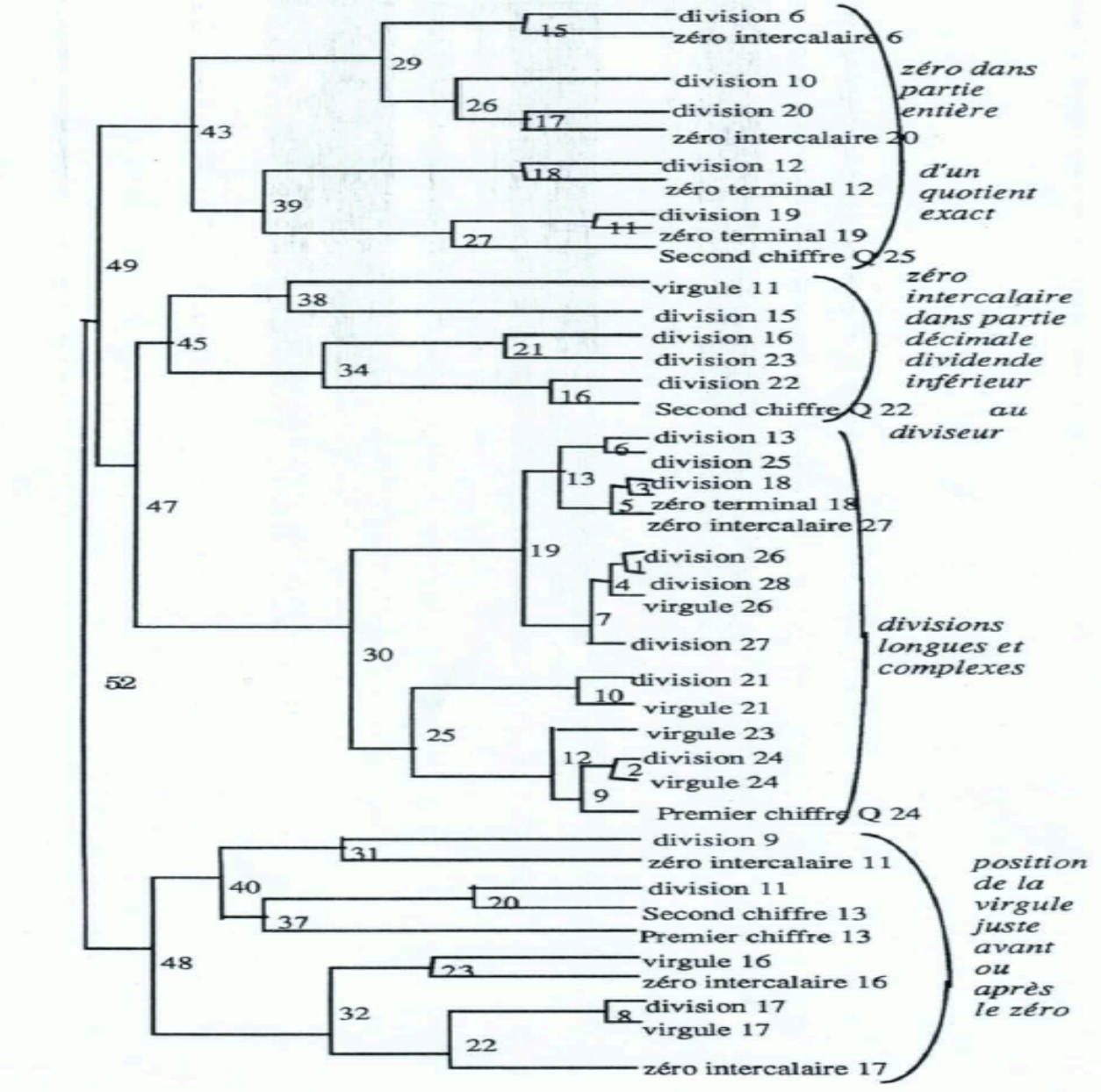
2-1-3-2 Classe de sixième

53 niveaux différencient deux classes de 54 variables : une classe peu importante de divisions simples (51), et une autre (52), plus importante, comportant les autres types de divisions.



ARBRE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES
PREMIERE GRANDE CLASSE
CLASSE SCOLAIRE : SIXIEME

-Pour la classe des divisions simples (niveau 51), nous avons les divisions n°3, n° 5, n°8, n°14, ainsi que la division n° 4, dont le dividende est inférieur au diviseur, et la division n°7, qui comporte un zéro intercalaire au quotient. A la différence de l'arbre du C.M.2, la division n°9 s'associe à cette catégorisation. Les difficultés précédemment constatées, de la division n°7, n'apparaissent plus et cette division fait maintenant partie des plus simples.



ANALYSE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

SECONDE GRANDE CLASSE

NIVEAU SCOLAIRE SIXIEME

Pour les autres types de divisions (niveau 52), nous avons 4 sous-groupes :

-Le premier sous-groupe (niveau 43), réunit des divisions avec **zéro intercalaire dans la partie entière du quotient,** (divisions n°6 et n°20) ou avec **zéro terminal au dividende ou au quotient** (partie entière, divisions n°12 et n°19). On retrouve aussi la division n°10, dont la difficulté réside

probablement dans le calcul du premier chiffre du quotient (égal à "1").

-Le deuxième sous-groupe (niveau 45), réunit des divisions dont le diviseur est un multiple de 10, (divisions n°15 et 16) avec des divisions délicates qui représentent des difficultés spéciales de calcul comme le zéro intercalaire après la virgule au quotient (divisions n°11 et n°16). On retrouvait déjà ces difficultés chez les élèves de C.M.2, et dans l'arbre commun ; se regroupe ici la division n°22 avec un dividende inférieur au diviseur. Une différence remarquable, par rapport aux arbres précédents, est la position de la division n°15, dans ce groupe de divisions "délicates".

-Le troisième sous-groupe (niveau 30), rassemble les **divisions longues et complexes, et les divisions particulières t**elle la division n° 13, dont le dividende est inférieur au diviseur, et qui représente un obstacle d'autant plus grand que les nombres représentés par le dividende (égal à 64), et le diviseur (égal à 74), se ressemblent ; ainsi que la division n° 25, qui présente une grande similarité avec la précédente. La division n°18 ensuite est, rappelons-le, la première division ayant un dividende à 5 chiffres (avec la présence de deux zéros à la fin); l'une des difficultés est en effet le report du zéro au quotient à la fin de l'opération. Enfin, nous trouvons les divisions n°26, n°21, n°24, n°28, **longues et complexes** (4 chiffres et plus aux dividendes, quotients décimaux), **la division n°27, dont le dividende est inférieur au diviseur, et qui comporte un zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient.** Ce même type de regroupement existe dans les arbres de similarités précédemment étudiés. Néanmoins, nous n'observons pas ici de différenciation entre les divisions les plus longues et complexes, situées à la fin du protocole, et les premières divisions comportant trois chiffres au diviseur. Ces divisions sont manifestement très difficiles pour tous les élèves. Le même regroupement (lien n°30) rassemble les paramètres longueur et complexité.

-Le quatrième sous-groupe rassemble des divisions dont le diviseur est un multiple de 10, et dont le quotient est décimal : (divisions n°16, n°17), avec des divisions dont la difficulté semble liée à la divisibilité par 6, 7, 8, comme dans la division n°9, ou encore dans le calcul du deuxième chiffre du quotient de la division n°13. On retrouve aussi les zéros intercalaires après la virgule des divisions n°11 et n°16. Le positionnement de la virgule juste avant ou juste après le zéro semble être le critère commun des similarités observées. Cette particularité ne correspond pas aux analyses précédentes.

En résumé, en classe de sixième, se différencient :

-les divisions simples comportant un chiffre au diviseur,

-les divisions ayant un zéro intercalaire ou terminal dans un quotient exact,

-les divisions longues et complexes ainsi que les divisions particulières n°13 et n°18, celles qui comportent une divisibilité par 5 et 10, ou des dividendes inférieurs aux diviseurs,

-les divisions comportant un zéro au quotient et un quotient décimal.

En comparant ces résultats à ceux de la classe de C.M.2, on relève surtout :

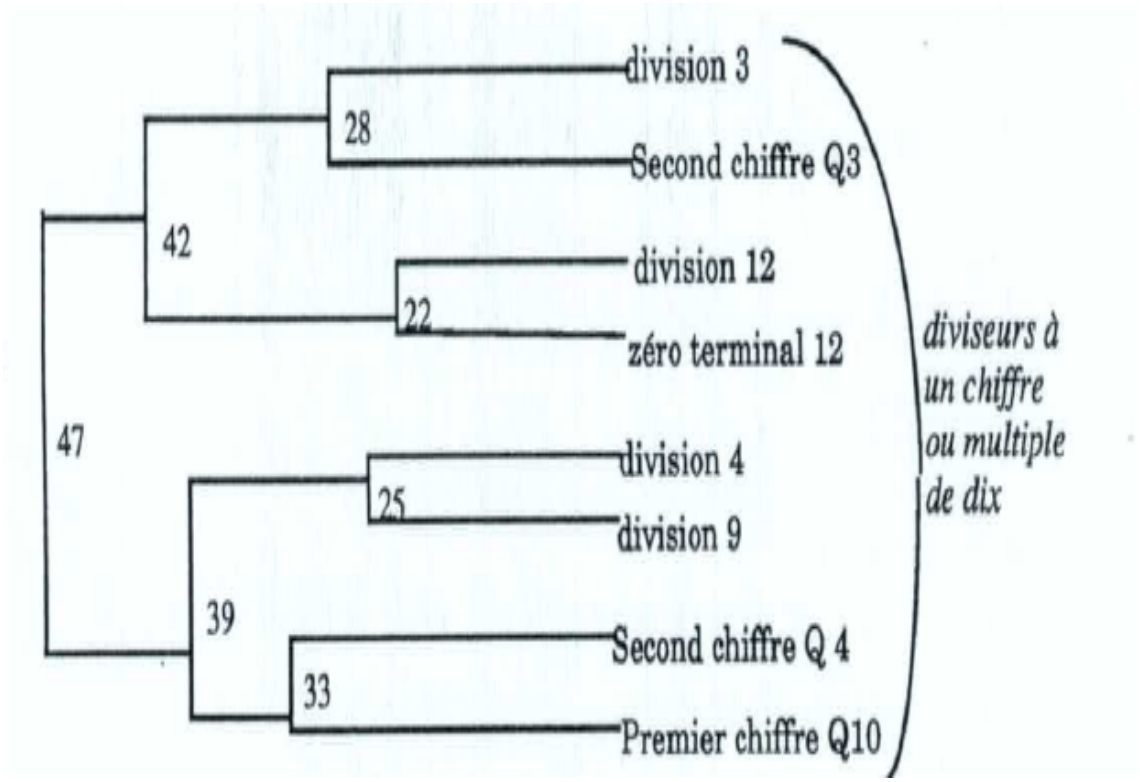
-la position de la division n°7 parmi les divisions les plus "simples",

-le regroupement des divisions dont la virgule est juste avant ou juste après le zéro.

2-1-3-3 Classe de cinquième

Trois classes se forment, relativement différentes de celles observées auparavant, ainsi que 53 niveaux et 54 variables.

-La première classe (niveau 47) regroupe les divisions simples.

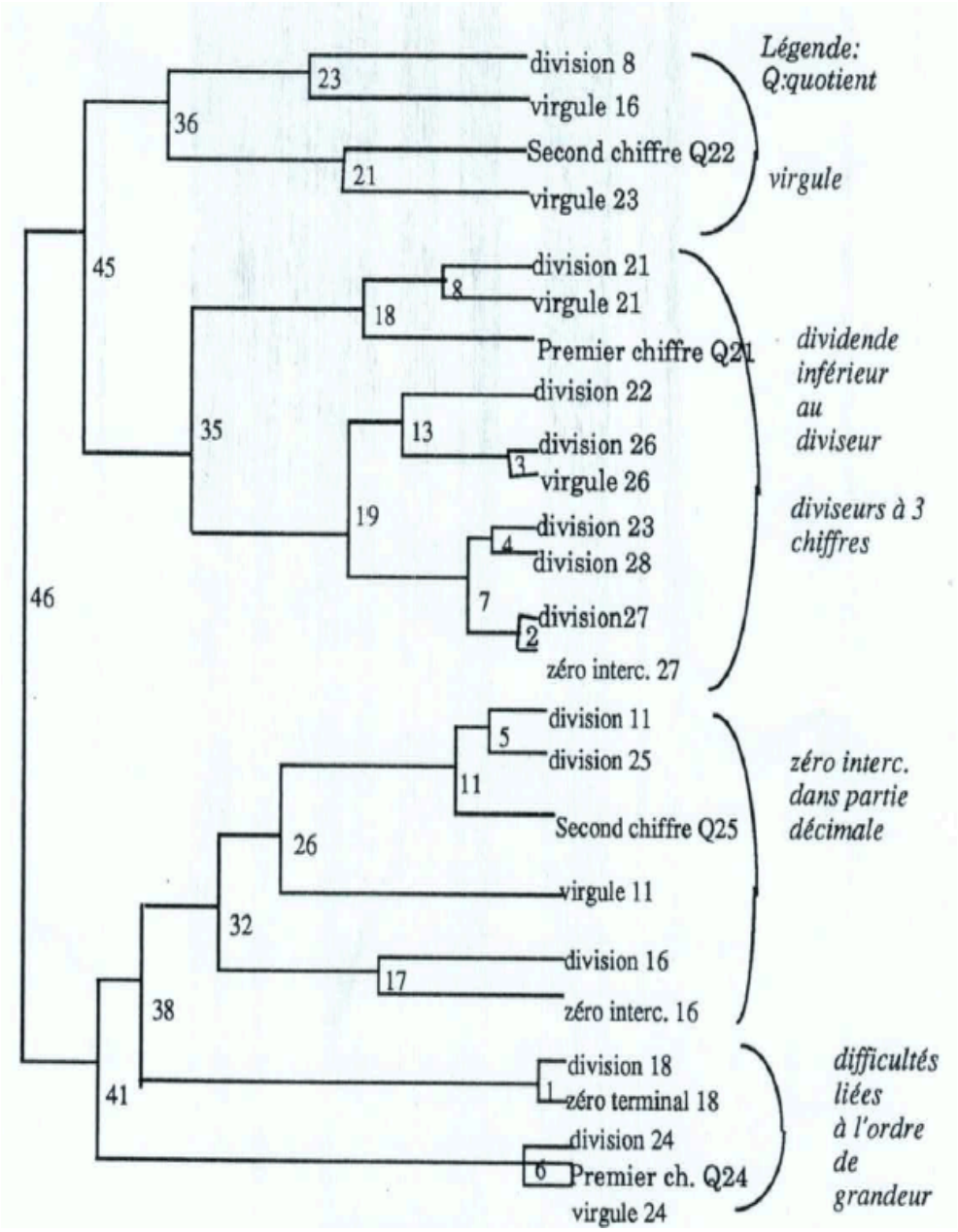


ANALYSE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

PREMIERE GRANDE CLASSE

NIVEAU SCOLAIRE CINQUIEME

-La deuxième classe (niveau 46) comprend les divisions "**longues" et/ou complexes.**

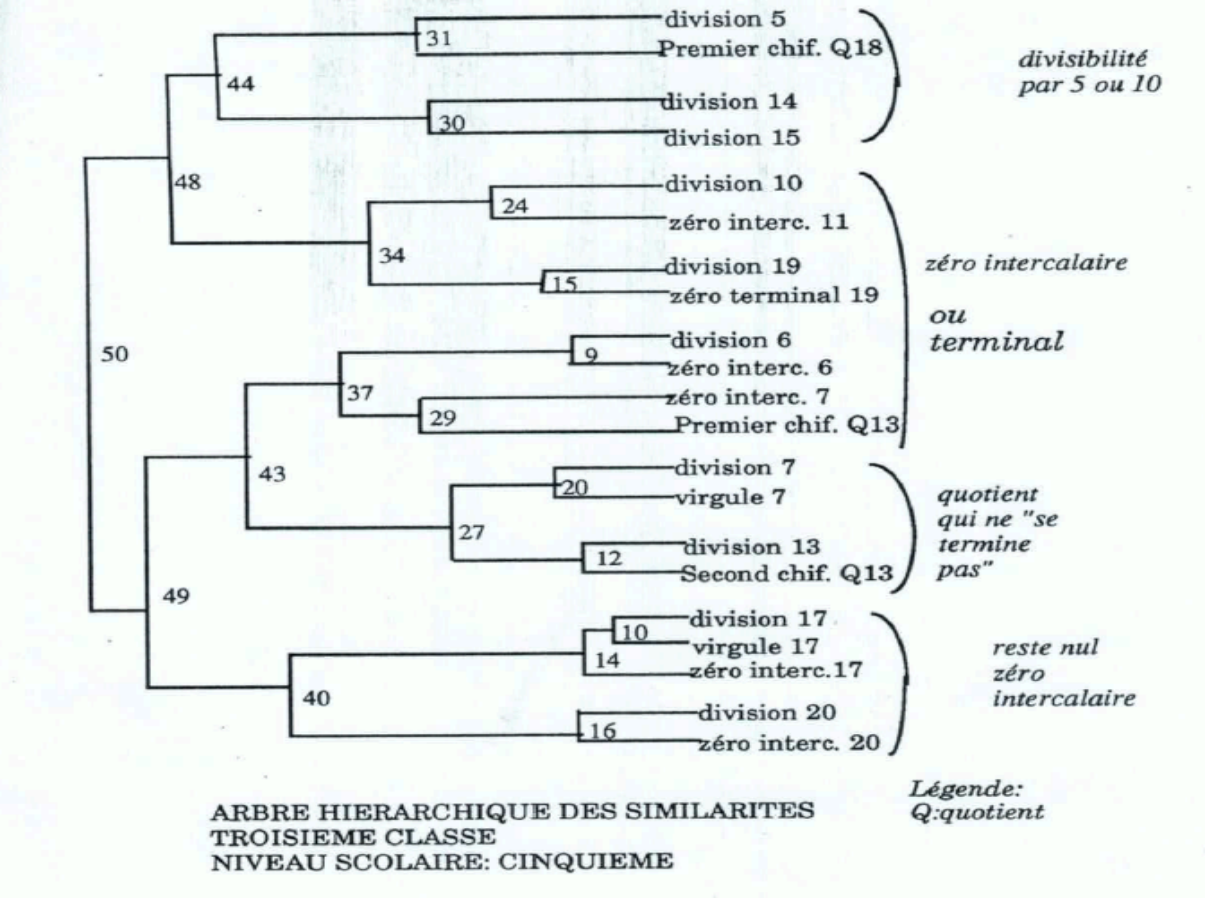


ANALYSE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

SECONDE GRANDE CLASSE

NIVEAU SCOLAIRE CINQUIEME

-La troisième classe (niveau 50) se décompose en deux sous-classes aux niveaux 48 et 49.



ANALYSE HIERARCHIQUE DES SIMILARITES

TROISIEME GRANDE CLASSE

NIVEAU SCOLAIRE CINQUIEME

-La première classe (niveau 47) comprend très peu de divisions. Nous avons les divisions n°3, n°9, n°12, n°4, et le premier chiffre (égal à 1) de la division n°10 : toutes concernent **des petits diviseurs**.

-La deuxième classe comprend deux sous-classes :

-Une première sous-classe (niveau 41) comprend les zéros intercalaires après la virgule au quotient : les divisions n°11 et n°16, la division n°18 avec un zéro terminal (ce qui diffère des arbres précédents), ainsi que deux divisions "longues" n°24 et n°25 qui **ne se terminent pas**. Nous ne constatons donc pas le même regroupement que pour la classe de sixième. Ces trois divisions requièrent de considérer un nombre de chiffres au dividende supérieur au nombre de chiffres du

diviseur. **Cette étape initiale est en cinquième une difficulté qui vient s'ajouter aux autres caractéristiques de calcul**. Ce phénomène est moins net dans les classes précédentes (sauf au C.M.1). Peut-être est-ce là le produit de l'usage "aveugle" des calculettes, qui remplace dès la sixième, l'apprentissage de l'algorithme.

-Une deuxième sous-classe (niveau 45) comprend des divisions "longues" dont le nombre de chiffres du dividende à considérer pour le calcul du premier chiffre du quotient, est égal au nombre de chiffres du diviseur, (divisions n°21, n°23, n°26). Se regroupent ici également les divisions n°22 et n°27, dont le **dividende est inférieur au diviseur**. On peut donc dire qu'une fois acquis le positionnement correct du zéro au quotient, les élèves se comportent comme dans le cas où le nombre de chiffres est égal au dividende et au diviseur. Par ailleurs, **quand le nombre de chiffres à prendre en compte au dividende est supérieur à celui du diviseur, les difficultés demeurent.** La référence au **schème primitif "partager" n'est plus possible**, le chiffre zéro n'est pas considéré comme un résultat possible, ni non plus dans certains cas, comme un nombre.

La sous-classe (niveau 49) comporte toutes les divisions ayant un zéro intercalaire dans la partie entière du quotient, notamment les divisions n°7 et n°17, qui ne se regroupent pas comme en classe de sixième. En sixième, comme au C.M.2, **ces regroupements se font à la fois autour des zéros terminaux ou intercalaires.** En cinquième, le regroupement concerne uniquement les zéros intercalaires, le zéro terminal ne paraît pas d'une difficulté de même ordre. Seul, le problème du zéro intercalaire au quotient soulève une difficulté constante du C.M.2, à la cinquième.

Par exemple, la division n°19 qui comporte un zéro terminal au quotient se regroupe avec les divisions par 5 et par 10 (divisions n°5, n°14, n°15). Nous pouvons considérer ainsi que la division n°19 est identifiée en cinquième, aussi bien par le diviseur multiple de 5 que par le zéro terminal au quotient.

En résumé, en classe de cinquième, l'analyse hiérarchique distingue :

-les opérations comportant des petits chiffres,

-celles comportant un zéro dans la partie entière du quotient,

-les divisions par 5 ou par 10 (dont la division n°17),

-celles ayant des particularités (n°13, n°18, n°25),

-celles dont le dividende est inférieur au diviseur, (ou dont les opérations longues et complexes,

-celles qui requièrent un long calcul.

2-1-4 - Remarques supplémentaires sur les résultats des analyses hiérarchiques

Les comparaisons constatées grâce à l'étude des similarités permettent plusieurs remarques nouvelles :

-Les divisions numéros 7 et 17 ont un taux de réussite similaire au C.M.2. En sixième, la division n°7 est regroupée avec les divisions longues, et la n°17 avec celles qui ont un zéro juste avant ou juste après la virgule. En cinquième, les divisions n°7 et n°17 se regroupent dans le lot des divisions dont le dividende, ou le dividende d'étape, est inférieur au diviseur.

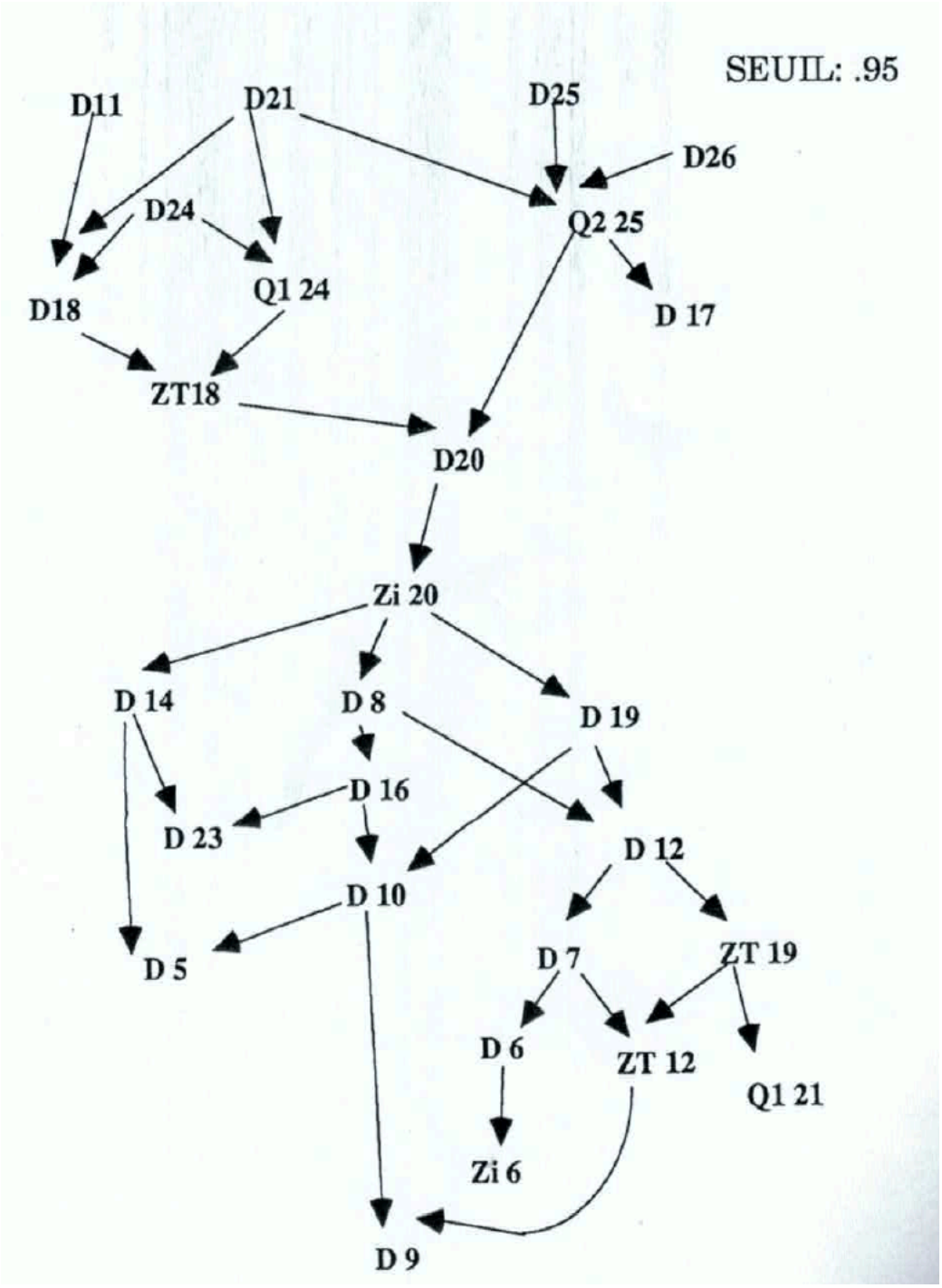
-Les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur (n°4, n°13, n°22, n°27) se regroupent avec les divisions dont le dividende d'étape est inférieur au diviseur, et ceci de façon assez semblable pour les trois niveaux de classe. Comme leur taux de réussite est faible, on peut considérer que, pour certains élèves, il est peu concevable d'effectuer de telles divisions. Les analyses effectuées plus loin vont nous permettre de préciser la singularité des schèmes utilisés. Néanmoins, la division n°4, dont le diviseur est composé d'un seul chiffre, ne semble pas relever de la même catégorisation.

La représentation liée à la situation du dividende d'étape inférieur au diviseur constitue une conceptualisation implicite, qui évolue du C.M.2 à la cinquième. Cette représentation concerne toutes les divisions dont le dividende d'étape est inférieur au diviseur, et donne lieu à des difficultés qui forment pratiquement un obstacle épistémologique : "*on ne divise pas un nombre plus petit par un plus grand*".

Les observations concernant le zéro au quotient nous semblent intéressantes, mais insuffisantes. Nous pourrons en effet, dans les développements qui suivent, formuler des remarques plus précises, grâce à l'implication entre variables.

2-2 - Hiérarchie implicative de variables

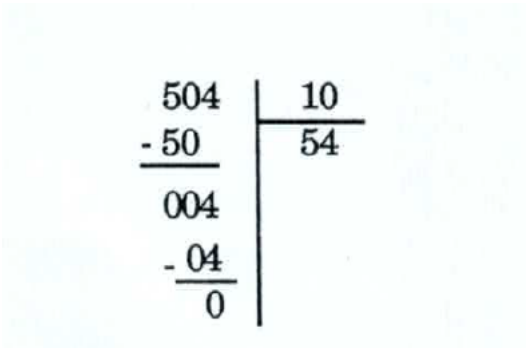
2-2-1 - Classe de C.M.1



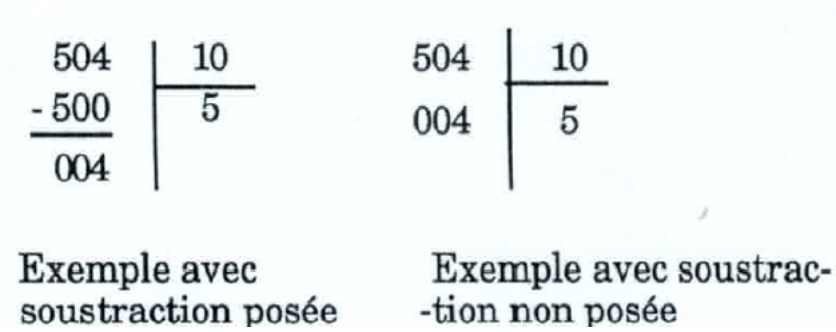
ARBRE HIERARCHIQUE DES IMPLICATIONS ENTRE VARIABLES
NIVEAU SCOLAIRE : CM1

La position de la division n° 20 articule deux amas de variables. Le premier révèle que la réussite aux divisions n°25, n°26 entraîne la réussite à cette division n°20, de même que la réussite aux divisions n°11, n°18 et n°24. C'est encore une fois identifier la division par 10, lorsque le dividende possède un zéro intercalaire, comme une difficulté du même ordre que celle des opérations les plus longues. Nous avions constaté le même phénomène dans l'analyse des similarités. La division n°17 a une position isolée dans ce graphe, l'association du schème "zéro intercalaire", et celui du dividende d'étape inférieur au diviseur se fait d'une façon particulière, et engendre des actions différentes, par exemple :

-identifier le reste comme deuxième chiffre du quotient :



-abandonner le calcul 4 ÷ 10, ou faire 5 x 10 = 500 :



La division n°11 (en dépit du fait qu'en C.M.1, on ne considère pas le zéro intercalaire après la virgule) se positionne en tête de la hiérarchie implicative. Cela veut dire que les élèves qui réussissent cette division sont capables de réussir la division n°18. L'évaluation du chiffre du quotient (division : 418 ÷ 69 = 6) est un problème plus difficile que celui du zéro au quotient. Au C.M.1, les élèves ne résolvent pas (ou peu) les divisions comportant plus de 4 chiffres au quotient.

La procédure de calcul de la division par un multiple de 5 relie les divisions possédant cette caractéristique :

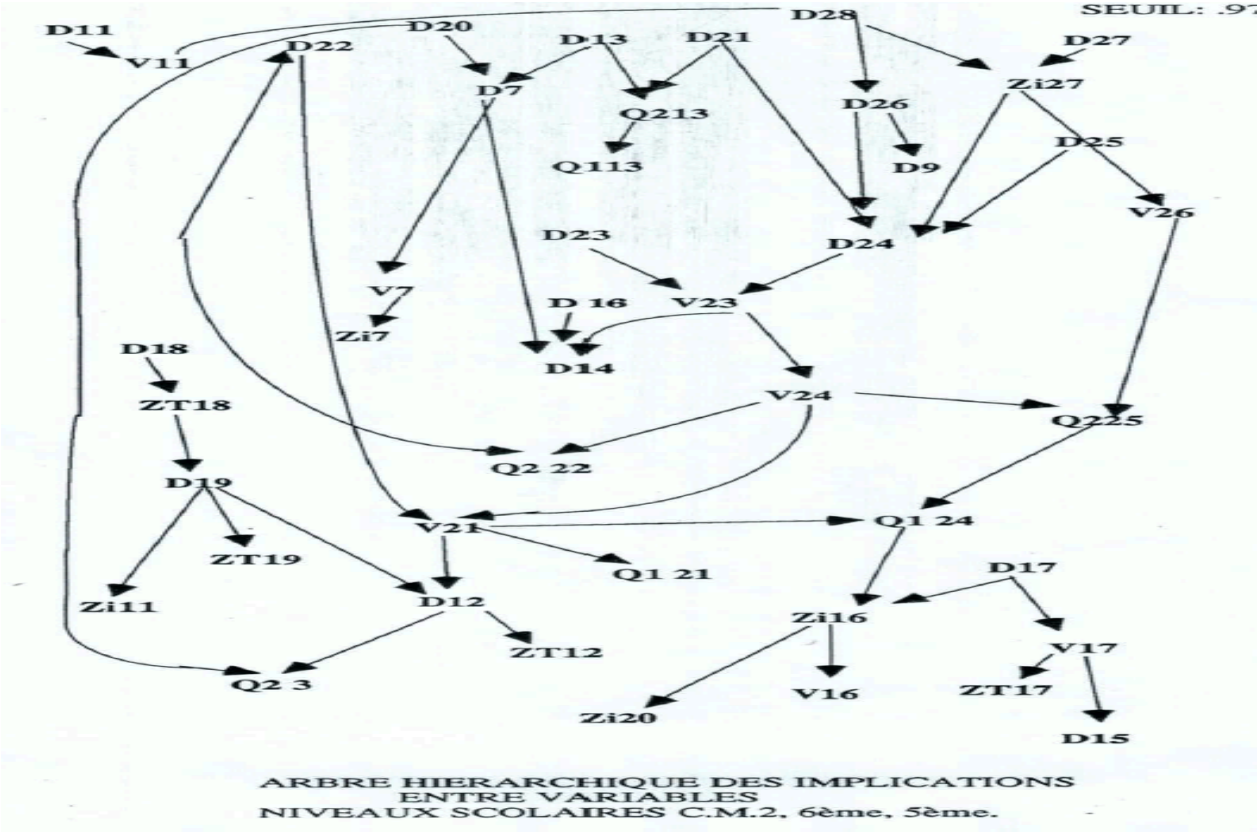
(Zi20----›D14----›D5) ou (Zi 20----›D19----›D20).

La chaîne implicative des divisions n°8, n°16 et n°10 et n°9 semble concerner le nombre décroissant de chiffres au quotient.

Les divisions possédant un zéro intercalaire ou terminal au quotient sont hiérarchiquement réussies en fonction de la longueur de l'opération. **L'échec est donc lié au zéro. Mais lorsque le zéro est bien placé, le degré de difficulté est fonction de la longueur de l'opération.** La "tribu" de ces zéros dans le graphe nous confirme l'obstacle premier qu'ils représentent au C.M.1.

Il faut ajouter que ce sont ici les élèves qui maîtrisent l'ordre de grandeur initial qui réussissent le mieux. L'évaluation du premier chiffre du quotient est le point de départ de l'exécution d'une division, les règles et les intentions du sujet suivent, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'analyse des similarités ; le schème "prendre autant de chiffres au dividende qu'au diviseur", sélectionne une catégorie de divisions comportant cette particularité.

2-2-2 - Classe de C.M.2, 6ème, 5ème, prises ensemble



ARBRE HIERARCHIQUE DES IMPLICATIONS ENTRE VARIABLES

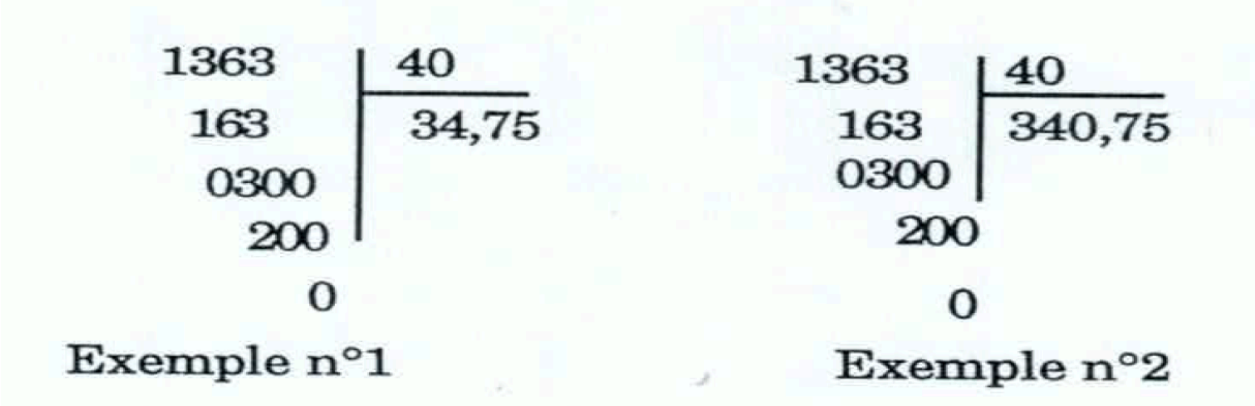
NIVEAUX SCOLAIRES C.M.2,6ème, 5ème

Comme le graphe est d'une lecture complexe, nous choisissons de ne décrire que les sous-graphes. Les divisions les plus complexes, positionnées en haut de la hiérarchie implicative, sont les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur, puis viennent celles qui comportent un zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient, puis les divisions les plus longues. Nous trouvons aussi dans l'ordre des caractéristiques les virgules et les chiffres au quotient.

Dans le cas des divisions qui possèdent un zéro intercalaire après la virgule, les problèmes rencontrés par les élèves sont liés à la conjonction de trois processus indépendants. Il faut "abaisser" un zéro quand les chiffres composant le dividende ont été utilisés, poser une virgule au quotient, puis "abaisser" de nouveau un zéro car le dividende d'étape est inférieur au diviseur. Les schèmes utilisés peuvent alors dégénérer de la manière suivante :

-abandon du zéro intercalaire (exemple n°1) :

-décalage de la virgule (exemple n°2) :

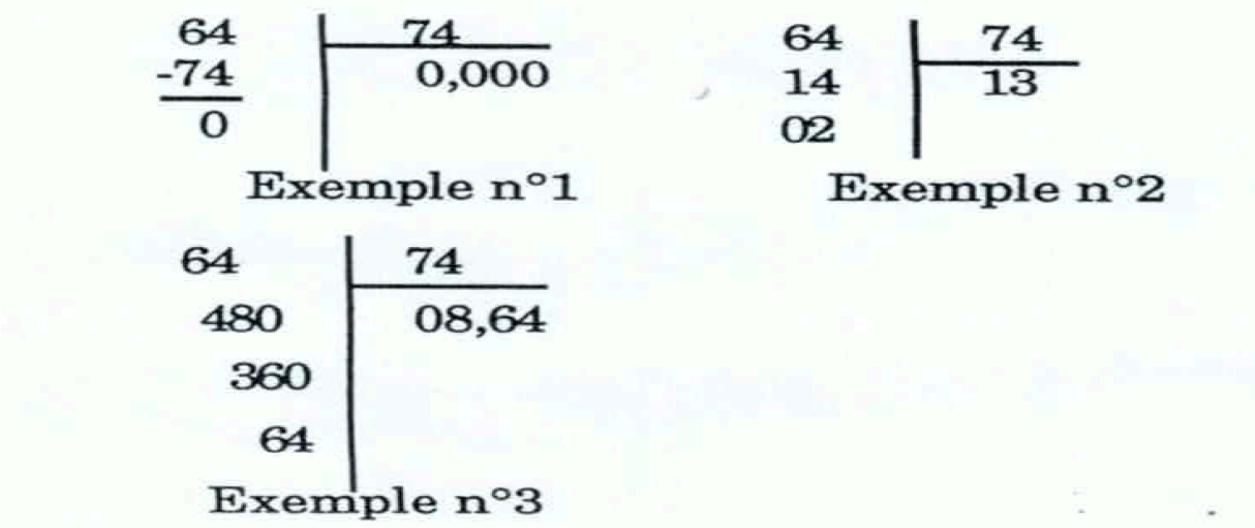


La division n°7 se positionne assez haut dans la hiérarchie comme la division n°17 et se comporte de manière singulière et s'isole. Le schème du zéro au quotient s'applique dans certaines conditions ; ici, il engendre des actions différentes en fonction de deux situations : une division qui "ne se termine pas"(n°7), un zéro à placer suivi immédiatement d'une virgule (n°17).

Précisons que les zéros intercalaires au quotient (n°16 et 20) hiérarchisent et s'isolent également. Le schème du positionnement du zéro intercalaire au quotient, une fois acquis, ne se généralise que pour certaines situations. Dans les autres cas, le zéro est abandonné, ou une virgule est créée à sa place.

L'analyse des implications fait apparaître la liaison qui existe entre les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur et les divisions les plus longues du protocole. Il nous faudra évaluer la stabilité de ce phénomène dans chacune des classes concernées. L'accent se portera aussi sur l'organisation et la hiérarchisation des données concernant le zéro au quotient.

Les divisions dont le dividende d'étape est inférieur au diviseur représente un obstacle épistémologique lié aux conceptions du sujet. L'enfant ne reconnaît pas ce type de divisions. Par exemple, nous pouvons lire dans certains protocoles "impossible". Parfois aussi l'opération est rayée ou comporte un point d'interrogation. Nous choisissons ici trois exemples de résolution :



Dans le premier cas, l'enfant confond le zéro avec le "1", et s'arrange pour que le reste soit nul. Dans le deuxième exemple, l'enfant divise 64 par 7 (« on ne divise pas un nombre plus petit par un plus grand !!!! »), laisse donc le "4" du diviseur, puis ne pouvant soustraire "7" de "6" (« on ne soustrait pas un nombre plus grand d'un plus petit ! »), effectue la soustraction inverse pour trouver "1". Ensuite, il s'occupe de la division suivante : 14 ÷ 4 = 3, puis fait 3 x 4 = 12, ôté de 14, reste 2. Cette procédure est tout à fait remarquable. Elle consiste à inventer de nouveaux schèmes. Le dernier exemple (n°3) montre un déplacement de virgule, le chiffre zéro n'étant pas une réponse possible.

"On ne divise pas un nombre plus petit par un plus grand" représente un schème résistant. Dans certains manuels actuels, aucune division (ou très peu) de ce type n'est proposée. Cela peut expliquer cette conception fausse.

Ce problème se conjugue avec un autre obstacle épistémologique. **Le chiffre zéro n'est pas considéré comme un nombre.**

Les analyses nous permettent de retenir les points principaux suivants :

-Les chaînes implicatives concernent une même caractéristique qui montre que plus le calcul est long, plus les erreurs sont difficiles à éviter (même chose au C.M.1). Cette information, apparemment triviale, soulève des problèmes pédagogiques.

-Cette remarque vaut pour la caractéristique "virgule". L'échec à une division à virgule engendre

l'échec à une autre division à virgule, et d'autant plus que l'opération est plus longue.

-Le report du zéro terminal au quotient est une difficulté plus grande que le positionnement du zéro intercalaire dans la partie entière du quotient, phénomène que nous n'avions pas prévu dans notre analyse a priori (même chose au C.M.1).

-Une division qui ne se "termine pas", telle la division n°7, représente un obstacle en soi. C'est une difficulté qui s'ajoute à celle du zéro intercalaire. C'est aussi la première occasion d'échec dans le déroulement du protocole.

-Enfin, les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur, et comportant au moins deux chiffres au diviseur, sont les plus ardues. Certains élèves écrivent par exemple, des phrases du genre "c'est impossible", ou inventent une manière de résoudre ce type d'opération, soit en inversant la position du dividende et du diviseur, soit encore en réduisant le diviseur à un seul chiffre (ex: 64 ÷ 74, se réduit à 64 ÷ 7, le chiffre 4 du diviseur étant abandonné).

Nous poursuivons cette analyse en comparant les niveaux C.M.2, sixième, cinquième.

2-2-3 - Etude comparative des trois niveaux C.M.2, sixième, cinquième

Nous allons ici effectuer une étude de chaînes implicatives particulières, en abaissant le seuil pour que les implications soient transitives. Présentons d'abord quelques chaînes implicatives relevées dans les arbres hiérarchiques (nous choisissons ici de conserver l'abréviation "D" pour le mot division, comme dans les "arbres implicatifs):

Pour la classe de C.M.2 (voir "arbre" hiérarchique des implications entre variables au seuil .97 en annexe):

D27--.78--->**D28**--.97--->**D7**--.97--->**D20**---.89-->**D19**---.97-->**D12**

Les divisions les plus longues impliquent la réussite à celles qui possèdent un zéro au quotient.

D11---.83-->**D7**---.97-->**D6**---.97-->**D3**

D22---.85-->**D17**---.97-->**D15**

Le dividende d'étape inférieur au diviseur organise des liens entre les schèmes de façon indépendante par rapport aux autres caractéristiques.

D22---.83-->**D13**---.97-->**D4**

Ces divisions (dividende inférieur au diviseur) ont une organisation spécifique.

D7---.97-->**D6**

D16---.97-->**D12**

D18---.88-->**D17**

Ces chaînes confirment la parenté des divisions ayant un zéro au quotient.

En classe de sixième, nous obtenons (voir "arbre" hiérarchique des implications entre variables au seuil .97 en annexe):

D27---.97-->**D26**---.97-->**D25**---.97-->**D13**

C'est une hiérarchie des divisions les plus complexes : elles sont d'ailleurs peu effectuées, car trop difficiles.

D18---.97-->**D20**---.98-->**D12**

Le zéro terminal se différencie.

D20---.74-->**D7**----.97->**D6**

Le zéro intercalaire dans partie entière est une procédure qui s'isole dans le graphe implicatif.

D27---.87-->**D22---.**90-->**D13**---.77-->**D4**

Pour toute division dont le dividende est inférieur au diviseur, l'obstacle épistémologique se conjugue à un échec massif.

D11---.71-->**D16**---.93-->**D17**

Le zéro intercalaire et la virgule sont des procédures qui, quand elles se conjuguent, sont très difficiles.

En classe de cinquième, nous obtenons (voir "arbre" hiérarchique des implications entre variables au seuil .97 en annexe) :

D22---.97-->**D7**

D27---.97-->**D17**---.97-->**D15**

D27---.97-->**D28**---.97-->**D26**---.97-->**D11**---.97-->**D16**---.97-->**D19**

Ces trois chaînes implicatives concernent des divisions dont le dividende est inférieur au diviseur (D22 et D27), et témoignent de la diversité des implications possibles néanmoins parallèles à celles relevées dans les classes précédentes : les hiérarchies tiennent compte aussi de la longueur de l'opération, et des zéros au quotient.

D20---.70-->**D19**

Nous avons toujours une implication pour les zéros terminaux.

D27---.83-->**D22**---.78-->**D13**

La même cohésion se retrouve pour les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur.

Au C.M.2 ou en sixième, l'organisation des divisions dont le **dividende est inférieur au diviseur** s'effectue en fonction de la longueur des opérations. Cela ne concerne pas la division n°27 : sa résolution est en soit une somme d'obstacles (virgule, zéro intercalaire au quotient dans la partie décimale, dividende inférieur au diviseur). La question qui se pose est alors la suivante : **est-ce concevable pour les élèves de faire une telle division ?**

Nous nous posons la même question pour la division n°22, car les élèves qui la réussissent sont capables de réussir l'obstacle particulier que représente la division n°17. On peut simplement dire qu'elle est plus accessible pour le petit nombre d'élèves qui maîtrisent "bien" le mécanisme opératoire de la division.

La procédure de calcul consistant à placer un zéro dans la partie entière du quotient est, si elle est établie, acquise, puisque les variables se retrouvent dans la "même branche".

Les difficultés les plus grandes concernent le positionnement d'un zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient, puis le zéro terminal dans la partie entière de celui-ci, puis le zéro intercalaire dans la partie entière, aussi bien en sixième qu'en C.M.2.

Un quotient décimal tel 201,33333...n'est pas un résultat concevable pour les élèves de sixième, et de C.M.2, car la division "ne se termine pas" : **la représentation d'une opération qui "doit s'achever"** (telles les opérations déjà apprises auparavant, addition, soustraction, multiplication), est probablement incompatible avec cette "forme inachevable" de résolution.

Pour les élèves de C.M.2, période au cours de laquelle l'apprentissage se centre sur l'introduction des décimaux, le choix de la position de la virgule n'a pas de cohérence avec l'ordre de grandeur requis du quotient.

Pour les classes de C.M.2, et sixième, le problème est **le calcul du zéro au quotient dès que celui-ci est décimal.**

En cinquième, les divisions dont le dividende est inférieur au diviseur, sont cette fois-ci hiérarchisées en fonction de la longueur de l'opération (divisions n°22 et 13). Cet aspect s'analyse ici comme une difficulté, et non plus uniquement comme un obstacle. **La division n°27 se place cependant, et ceci parallèlement à la division n°22, au sommet de la hiérarchie des difficultés**. Leur maîtrise pronostique la réussite aux autres types de divisions. Ce phénomène existe aussi dans les classes de C.M.2. En sixième, la réussite aux divisions 27 et 22 ne conditionne pas totalement la réussite aux autres divisions, notamment les plus longues.

La division n°7 apparaît encore ici isolée dans le graphe ; cette fois-ci accompagnée de la division n°6 : **son échec est identifiable** de la même façon que pour les classes de sixième et de C.M.2.

2-2-4 - Conclusion

Les difficultés liées aux zéros du quotient montrent que pour l'élève, le quotient a un effet en retour sur la procédure : l'élève s'arrête ou marque une erreur. Cette difficulté se produit aussi bien quand le dividende d'étape est inférieur au diviseur, que lorsque le dividende est inférieur au diviseur. L'élève ne songe pas au zéro ou ne sait pas comment faire avec un zéro.

L'exécution de l'algorithme semble ainsi concerner l'anticipation et pas seulement la prise d'information. L'anticipation est notamment une gêne, dans le cas de la virgule et du zéro.

En résumé, plus le niveau scolaire s'élève, mieux les schèmes existants s'adaptent à des situations plus spécifiques, sauf si les conceptions sous-jacentes entravent cette adaptation. La résistance à ces situations nouvelles peut alors se renforcer. Au lieu de parler de l'algorithme de la division, il nous faut donc parler d'un ensemble de schèmes, qui n'ont pas tous des propriétés d'effectivité et de nécessité. Les conceptualisations sous-jacentes à ces schèmes sont ainsi mises en évidence et mises en question.

2-3 - Hiérarchie implicative entre classes de variables

Rappelons qu'il s'agit de distinguer les groupes de données les plus fortement reliés et de trouver une orientation dissymétrique aux liaisons constatées (voir arbre hiérarchique des

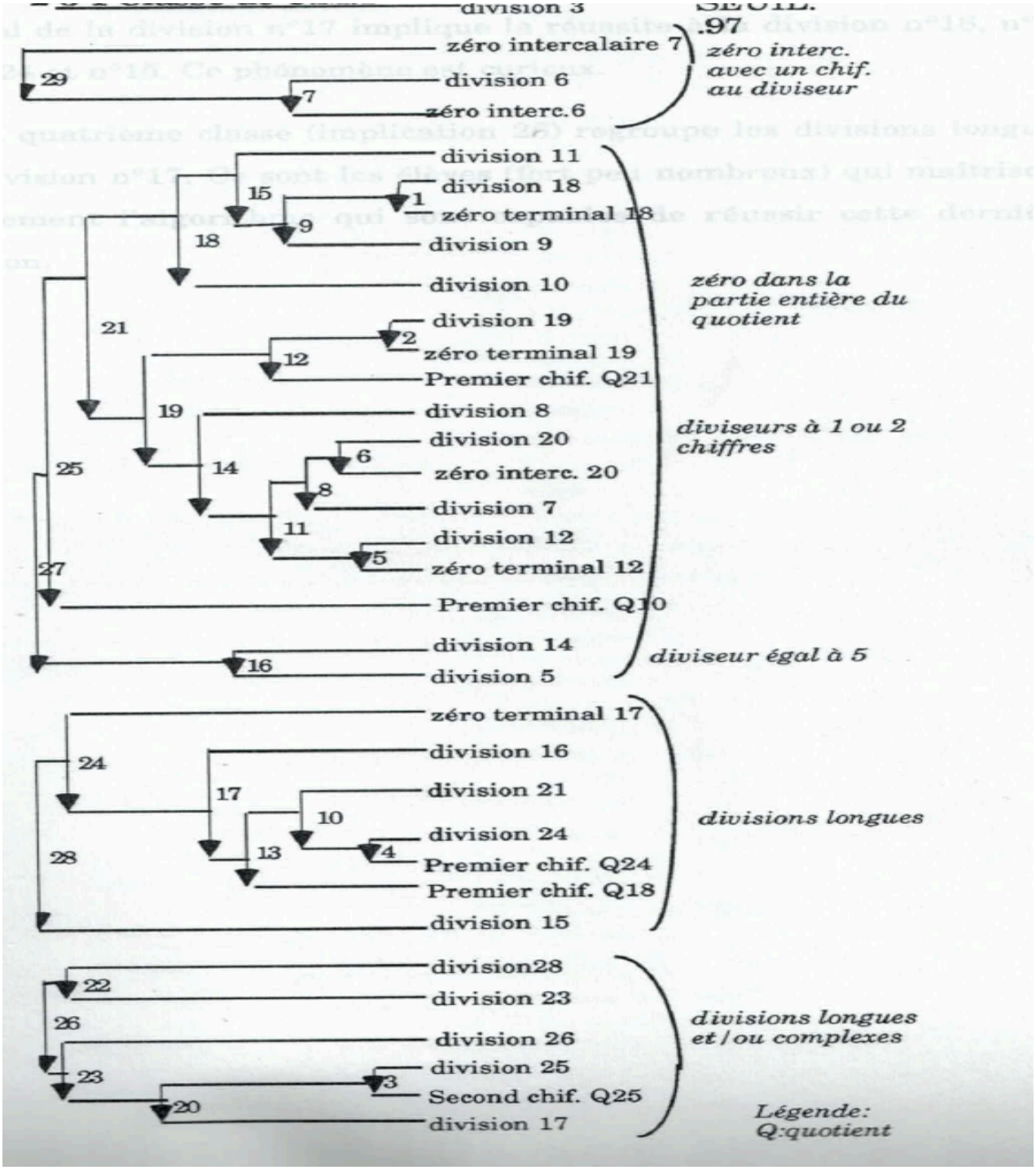
implications entre classes de variables page suivante).

Pour le C.M.1, nous considérons 34 variables et 29 niveaux d'analyse. Rappelons que pour les élèves de C.M.1, le calcul s'arrête à la partie entière du quotient (pas de virgule).

Quatre grandes classes émergent (implications des niveaux 27, 29, 28 et 26). La première grande classe (implication 27), est composée de l'implication 16 et de l'implication 25. Les élèves qui réussissent la division n°14 réussissent la division n°5: la division par 5 est le critère commun, et la différence concerne le reste, nul ou non. Les liens numérotés, 1, 2, 5, ne sont nullement informatifs puisqu'ils indiquent que la réussite aux divisions n°18, n°19, n°12, implique la réussite aux zéros terminaux du quotient, mais il ne peut pas en être autrement, de même pour la division n°20 (implication 6).

Par ailleurs, pour la division n°7, l'implication entre le zéro intercalaire et la réussite est inverse (implication 28). Cela signifie que **les erreurs sont toutes relatives au positionnement du zéro**, et que la réussite au zéro implique la réussite à la division, en dépit du fait qu'il y a d'autres erreurs possibles.

2-3-1 Classe de CM1



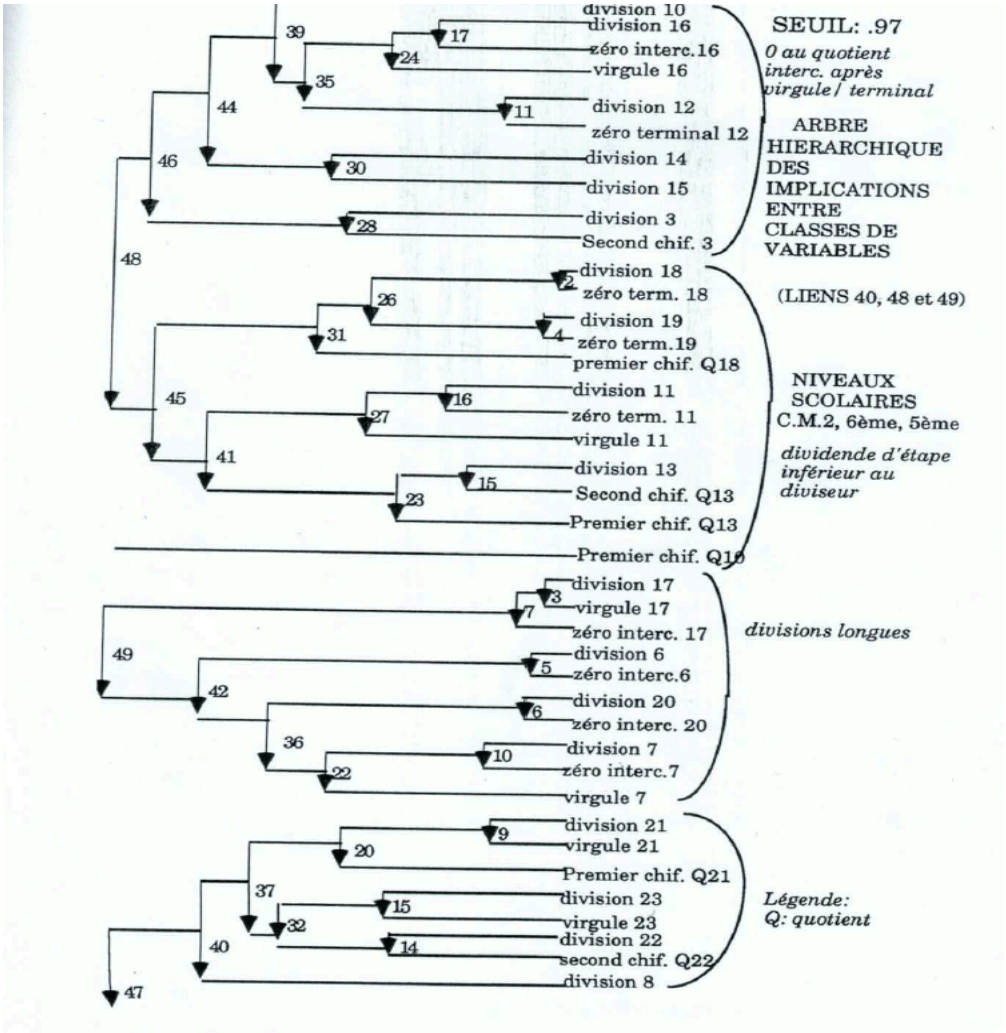
ARBRE HIERARCHIQUE DES IMPLICATIONS

ENTRE CLASSES DE VARIABLES - NIVEAU SCOLAIRE C.M.1

Dans la troisième classe (implication 28), on observe que le zéro terminal de la division n°17 implique la réussite à la division n°16, n°21 puis n°24 et n°15. Ce phénomène est curieux et prête difficilement à l'interprétation.

La quatrième classe (implication 26) regroupe les divisions longues et la division n°17. Ce sont les élèves (fort peu nombreux) qui maîtrisent parfaitement l'algorithme qui sont capables de réussir cette dernière opération.

2-3-2 Classes de C.M.2, 6ème, 5ème

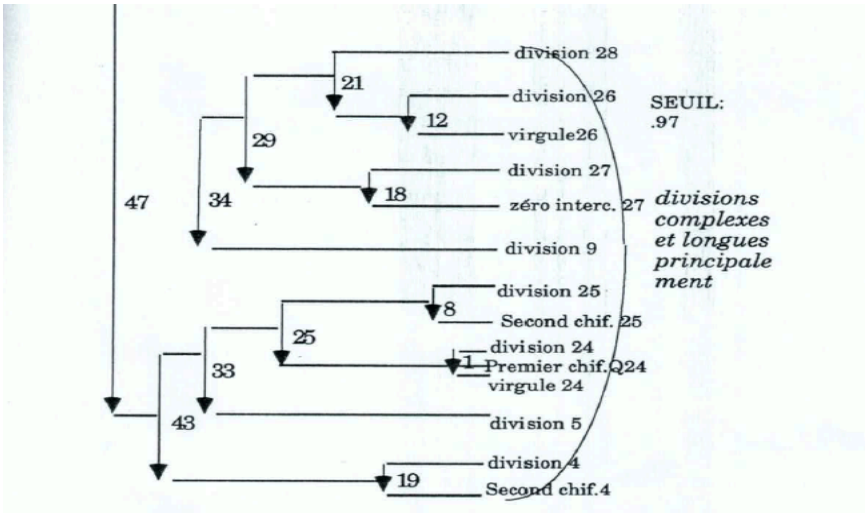


ARBRE HIERARCHIQUE DES IMPLICATIONS

ENTRE CLASSES DE VARIABLES

(LIENS 40,48 et 49)

49 niveaux d'analyse et 54 variables sont retenus dans cette analyse. Trois ensembles distincts englobent toutes les variables (liens 48, 49, 47).



ARBRE HIERARCHIQUE DES IMPLICATIONS

ENTRE CLASSES DE VARIABLES

NIVEAUX SCOLAIRES C.M.2, 6ème, 5ème

(LIEN 43)

Le premier ensemble (lien 48) : (10---->16---->12), (14---->15---->3), (18---->19), (11---->13) concerne les implications entre classes de variables faisant intervenir un zéro au quotient. Notons que la réussite à la division n°11 (zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient) implique la réussite à la division n°13 (dividende inférieur au diviseur). Quand le dividende d'étape est inférieur au diviseur, la division est plus difficile que celle qui, dès le départ, comporte cette particularité. L'obstacle rencontré en cours de résolution est plus important. Notons aussi que nous trouvons ici les quotients avec un zéro terminal.

Le deuxième ensemble (lien 49) : 17---->6---->20---->7 nous indique que la réussite au zéro au quotient à la division n°17 conditionne la réussite aux divisions comportant des zéros intercalaires placés au quotient.

Le troisième ensemble (lien 47) : (21---->23), (22---->8), (28---->26---->27---->9), (25---->24---->5---->4) indique une hiérarchisation construite sur le principe de la longueur et de la complexité des divisions.

2-3-3 - Comparaison des trois niveaux

Nous présentons les graphes et les commentaires en annexe pour chaque niveau scolaire.

Au C.M.2, se distinguent deux classes larges d'implications. Cette compacité témoigne de la présence de schèmes qui se coordonnent (de même au C.M.1).

La hiérarchie pour la sixième souligne une plus grande disparité entre classes de variables. Les groupements sont plus nombreux qu'en classe de C.M.2. Une certaine déperdition de l'algorithme étant constatée (voir les résultats de l'analyse factorielle des correspondances à cet effet), les schèmes sont davantage isolés. En sixième, la réussite au zéro intercalaire de la division n°16 implique la réussite à la même division ; nous observons la même chose en cinquième pour le zéro terminal de la division n°12. Les erreurs sont donc toutes liées au zéro. **Le problème du zéro l'emporte sur tous les autres types d'erreurs.**

En cinquième, nous obtenons un ensemble de regroupements que l'on peut qualifier de sporadiques par rapport à celles observées en C.M.1, en C.M.2. **Aucune grande classe n'émerge**. Cet aspect, déjà observé en sixième, se développe en cinquième, les procédures étant encore plus isolées.

Notons enfin que l'analyse des variables concernant le premier ou le deuxième chiffre du quotient ne nous a pas apporté des informations intéressantes.

2-3-4 - Conclusion

C'est le mérite d'A. Larher, avec le concours de R. Gras, d'avoir développé dans sa thèse cet instrument statistique intéressant, qui représente un lien essentiel entre l'implication et l'analyse hiérarchique entre variables. En effet, la cohésion des procédures utilisées est représentée d'une façon très différente d'une classe donnée à une autre. Pour la classe de cinquième notamment, l'aspect sporadique des classes de variables est nettement différentiable de celui de la classe de C.M.2. Ce processus s'amorce d'ailleurs dès la sixième.

Les schèmes s'organisent d'une manière très différente en cinquième. **Certaines organisations de schèmes peuvent être transitoires.** Le regroupement en classes témoigne de la force des parentés constatées. Ces parentés se désagrègent partiellement entre le C.M.2 et la cinquième. La cohésion correspond peut-être seulement à une phase de l'apprentissage. On peut faire l'hypothèse d'une certaine déperdition de l'algorithme.

L'apprentissage de l'algorithme de la division, a lieu essentiellement dans notre population dans les classes de C.M.1 et de C.M.2. A la fin du C.M.2, elle n'est pas acquise. Nos résultats montrent la lenteur de leur appropriation, et la diversité des schèmes développés au cours de cette acquisition. Le répertoire des schèmes est en constante évolution, les compétences se conservent

difficilement en cinquième, les conditions d'une automatisation correcte ne sont pas réalisées.

Cela est préjudiciable au traitement de nouvelles classes de problèmes et des relations liées à l'utilisation de cet algorithme. L'enfant développe ainsi des schèmes d'action personnels qui le conduisent souvent à l'erreur.

3 ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

3-1 - Introduction

Pour l'analyse des correspondances multiples, les variables retenues sont la réussite, l'échec et les caractéristiques des divisions (virgule, zéro intercalaire, etc...). Une première analyse nous permet de donner un sens à la relation de ces variables. Nous étudions le niveau C.M.1 d'une part, et les trois autres niveaux d'autre part.

Dans le cas des variables qualitatives, définies sur une population d'élèves comportant certaines modalités, nous choisissons une deuxième analyse de correspondances multiples, concernant les variables sexe, retard, catégorie socioprofessionnelle, niveau de classe (C.M.1, C.M.2, sixième, cinquième), et les modalités réussite ou échec des divisions (retenues sous C.H.I.C., soit 26 divisions). Nous ne retenons pas ainsi pour cette deuxième analyse, les caractéristiques particulières des divisions.

Nous abordons enfin une troisième analyse avec les modalités échec et réussite des divisions, et les variables relatives aux soustractions (posées ou non posées).

3-2 - Première analyse : caractéristiques des divisions pour les classes de C.M..2, sixième, cinquième:

3-2-1 Analyse du premier axe

54 variables sont envisagées pour l'analyse des classes de C.M.2, sixième et cinquième (Annexes pp 24-28).

Les cinq premiers axes restituent respectivement les pourcentages d'inertie suivants : axe n°1: 10,96%; axe n°2: 6,68%; axe n°3: 6,32%; axe n°4: 5,75%; axe n°5: 5,22% . Nous choisissons d'analyser les 2 premiers axes dont les significations nous apparaissent les plus claires.

Pour le premier axe (axe n°1), les variables les plus contributives sont les suivantes : (

-sur le demi-axe positif : 5, 15, 6Z, 7V, 17V, 17Z, 17,

-sur le demi-axe négatif : 26, 28, 27T, 25, 26V, 21, 24V, 24, 23, 22.

Les composantes positives comprennent les divisions correspondant aux tâches les plus élémentaires, et les composantes négatives, celles qui sont les plus complexes. L'orientation de cet axe est manifestement celle de la **complexité.**

Les premières difficultés apparaissent avec les divisions 12, 15, 17, et 20 (possédant un zéro au quotient). La complexité du positionnement du zéro dès que le dividende d'étape est inférieur à un diviseur à deux chiffres (divisions n°13, n°16, n°11) accompagne un brusque décalage de la réussite le long du demi-axe négatif. Ce sont les **divisions les plus longues** qui pèsent le plus du côté négatif.

3-2-2 - Analyse du deuxième axe

Les variables principales les plus corrélées à cet axe sont :

-sur le demi-axe positif : 4, 5, 8

-sur le demi-axe négatif : 22, 17, 17Z, 17V.

Bien que les divisions numéros 4 et 5, à elles seules, expliquent la plus grande partie de l'inertie, on remarquera que la procédure adéquate unificatrice selon le demi-axe négatif consiste à ne pas négliger le zéro intercalaire dans le quotient. En effet, on retrouve sur ce demi-axe négatif les divisions numéros 6, 18, 16, 11, 17. On remarque aussi que le même sort est attribué au zéro intercalaire et au zéro terminal (sauf pour la division n°12). Par ailleurs, la position sur le demi-axe positif de la division n°27 (avec une faible contribution) qui présente au quotient à la fois un zéro initial et un zéro intercalaire montre que ces démarches associées ne se réduisent pas l'une à l'autre.

Ainsi, le facteur associé à cet axe condense la nature du zéro au quotient :

-d'une part, côté positif, l'absence du zéro traduit la réussite aux divisions,

-d'autre part, côté négatif, rôle d'un regard plus étendu de l'opération si celle-ci comporte un dividende d'étape inférieur au diviseur.

La représentation de la division comme problématique d'une recherche du nombre de parties dans un tout (c'est-à-dire un dividende contenant le diviseur) prédomine dans notre population.

3-2-3 - Réussites et échecs aux divisions et variables supplémentaires :

3-2-3-1 Premier axe

Examinons maintenant, la position des variables supplémentaires dans la première analyse (Annexe pp 29-33):

Nous ne retenons que les deux premiers axes dont les taux d'inertie sont 76,28% pour l'axe n°1 et 3, 89% pour l'axe n°2

Pour la variable sexe :

La variable MASC (sujets masculins), corrélée négativement à cet axe,(® = -0,05) exprime certainement une maîtrise un peu meilleure dans les divisions les plus complexes et une plus grande rapidité des garçons. La variable FEMI, corrélée positivement traduit l'information inverse.

Pour la variable non-retard

Cette variable n'est pas corrélée. Le redoublement ne favorise pas la maîtrise de la division.

Pour la variable niveau scolaire

La variable sixième (® = 0,19) est corrélée positivement, la variable C.M.2, négativement (® = -0,10), et celle de la cinquième également (® = -0,13). Il apparaît nettement ici que les élèves de sixième réussissent les divisions les plus longues et les plus complexes, et que ceux de C.M.2 et de cinquième réussissent les plus simples.

Ainsi, les élèves de sixième ont des performances considérables dans la résolution des opérations, c'est à dire au moment où les acquisitions quant à la technique opératoire est en cours. La différence contrastée de la réussite des élèves des C.M.2 appelle les interprétations suivante s:

Les réussites des élèves de sixième ne sont pas des acquis durables, en effet, un an après, l'échec est important. L'introduction des calculettes en classe de sixième ne nous apparaît pas être le seul élément explicatif à l'échec global constaté. C'est plutôt un retour sur l'analyse des réussites constatées en sixième qui permet de souligner leur effet éphémère, ce qui relativise le constat d'échec constaté en classe de Cours Moyen deuxième année.

Le changement scolaire que représente le passage au collège, peut être aussi un facteur d'échec intéressant à souligner, bien que notre analyse ne nous permette pas d'en apprécier l'importance. Nous nous bornerons à essayer de caractériser la nature des difficultés conceptuelles en jeu.

3-2-3-2 Deuxième axe

Pour la variable sexe :

La variable MASC, corrélée négativement à cet axe, avec un coefficient de corrélation (® = -0,02) se projette donc sur le demi axe positif ce qui indique une plus grande maîtrise des opérations dont le dividende est inférieur au diviseur. Les filles se situent dans une position inverse. Par ailleurs la variable FEMI, corrélée positivement à cet axe, (® = 0,02) qui se projette sur le demi-axe négatif, indique une meilleure maîtrise des zéros intercalaires ou terminaux au quotient.

Pour la variable "non retard":

Cette variable présente une légère corrélation avec le demi-axe négatif (® = -0,03).

Pour la variable niveau :

Les élèves de sixième, à l'opposé de ceux de C.M.2 et de cinquième, présentent une corrélation positive assez nette (® = 0,40) avec le demi-axe positif.

3-3 - Deuxième analyse : caractéristiques des divisions pour la classe de C.M.1

Les trois premiers axes restituent les pourcentages d'inertie suivants : axe n°1, 76,68 %; axe n°2, 4,43%; axe n°3, 4,03%. Le premier axe, à lui seul, restituant le maximum d'informations, il est considéré en priorité (Annexes pp 33-39).

Axe n° 1 : Les variables contributives et les plus corrélées à cet axe sont :

-sur le demi-axe négatif : échec aux divisions

-sur le demi-axe positif : réussite aux divisions

Cet axe différencie les échecs et les réussites aux divisions. Nous en resterons là et centrerons notre attention sur l'axe 2.

Axe n°2 : Les variables principales sont :

-sur le demi-axe négatif :

-sur le demi-axe positif :

Ce sont les divisions qui comportent un zéro intercalaire ou terminal au quotient qui ont des composantes négatives ; les composantes positives représentent les divisibilités par 5, 10 ou multiple de 10, et les divisions longues. La conjonction représentée par l'échec aux divisions et la caractéristique du zéro au quotient sur les demi-axes négatifs souligne l'importance de ce facteur. La divisibilité par 5, 10 ou multiple de 10 est un facteur qui favorise nettement la réussite. Cette dernière s'estompe nettement quand la longueur de la division s'accroît. Nous choisissons de ne pas poursuivre notre analyse pour les caractéristiques des divisions, car les résultats seraient redondants avec ceux que nous avons déjà relevés dans les analyses hiérarchiques.

3-4 - Troisième analyse : réussite ou échec aux divisions et soustractions

Pour la détermination de l'axe n°1, ayant un rang élevé (84,65%), on tiendra compte, cette

fois, de éléments ayant une contribution très importante (voir Annexes pp 40-47):

-*le demi-axe positif* est caractérisé par les variables suivantes : PS03, PS04, PS06, PS07, PS08, PS09, PS10, PS11, PS12, PS13, PS14, PS15, PS16, PS17, PS18, PS19, PS20, PS21, PS25, PS26, PS27, PS28

-*le demi-axe négatif* : PS22, PS23, PS24, NS03, NS04, NS05, NS06, NS07, NS08, NS09, NS10, NS11, NS12, NS14, NS15, NS16, NS17, NS18, NS19, NS20, NS21, NS25, NS26

Cet axe distingue les soustractions posées ou non posées. Le facteur le plus discriminant étant le fait de poser ou non la soustraction prouve que c'est bien la technique opératoire qui oppose notre cohorte d'élèves, toutes les variables ayant une contribution élevée (entre 80 et 99%). Regardons ainsi de plus près ce que donne l'axe n°2.

L'axe n°2 restitue 9,63% de l'information totale, ce qui est encore un pourcentage tout à fait significatif pour nos interprétations, car il représente 9,63% de l'inertie :

-*sur le demi-axe positif* : échec aux divisions selon la longueur de la division d'une part, et des difficultés. Les difficultés se hiérarchisent de la façon suivante: tout d'abord, et en commençant par les plus complexes, on a le cas de 3 chiffres composant le diviseur, puis celui où le dividende est inférieur au diviseur, puis celui où le quotient comprend un zéro intercalaire dans la partie décimale, la division n°17, qui représente une difficulté que nous avons déjà explicitée, enfin suivent les divisions qui comprennent un zéro intercalaire dans la partie entière du quotient, et les autres "petites" divisions.

-*sur le demi-axe négatif* : on trouve ici la réussite aux divisions des plus simples aux plus complexes selon la hiérarchisation des difficultés du demi-axe négatif.

Cet axe discrimine ainsi la réussite et l'échec aux divisions. Remarquons que l'on passe d'un taux d'inertie très important pour l'axe n°1, à un taux nettement plus faible pour l'axe n°2, le premier a donc un sens clair. L'interprétation de ces deux axes, avec des éléments qui, dans chaque cas, ont une contribution très massive, détermine de façon très importante les constats suivants :

D'une façon générale, nous pouvons dire que **le fait de poser la soustraction favorise la réussite aux divisions.** Par ailleurs, l'échec aux divisions est un phénomène moins lié au fait de ne pas poser la soustraction. Par ailleurs, il est tout à fait remarquable de voir que le fait de poser la soustraction ne favorise particulièrement ni l'échec, ni la réussite pour les divisions n°4, n°13, n°22, n°27 dont le dividende est inférieur au diviseur, ainsi que les divisions n°23, n°24, n°26 et n°28, qui sont celles dont le diviseur comporte 3 chiffres au moins. Les contraintes supplémentaires lors de la résolution de l'opération, imposées par la soustraction non posée ne sont donc pas un problème majeur pour l'enfant qui maîtrise des divisions dont les difficultés conceptuelles sont les plus

grandes. **En d'autres termes, le peu d'élèves (de notre population) qui maîtrisent le mieux ces opérations, et par extension l'algorithme de la division tout court, sont les seuls capables d'effectuer une soustraction mentale.** Cette capacité d'abstraction, supérieurement délicate, n'est réservée en fait qu'à ceux qui maîtrisent de façon supérieure les processus requis par la résolution elle-même.

3-5 - Conclusion

Globalement, les contraintes supplémentaires engendrées par la soustraction non posée sont trop importantes pour l'élève, qui a déjà fort à faire avec les autres types de difficultés de l'opération. L'élève, en posant les soustractions a de meilleures chances de réussir. Poser la soustraction représente un appui essentiel dans l'exécution de l'algorithme.

La question qui se pose alors est de savoir s'il est utile d'inviter les élèves à ne pas poser la soustraction et de surcharger l'apprentissage d'un algorithme complexe sous prétexte d'écourter l'opération dans sa présentation écrite, ou de poursuivre une certaine tradition pédagogique. Ne pas poser la soustraction est une pratique particulièrement répandue dans notre population (presque tous les sujets de C.M.2, sixième, cinquième, et la moitié des C.M.1 ne posent pas la soustraction (1700 sujets au départ). On peut considérer en outre que l'usage de la calculette rend superflu l'économie de l'écriture, et permet au contraire de concentrer l'apprentissage de la division écrite sur la signification des différentes étapes, soustractions comprises.

CONCLUSION GENERALE DE LA PARTIE EMPIRIQUE

Au C.M.1, les divisions longues représentent une difficulté de même ordre que celle rencontrée quand le dividende possède un zéro intercalaire. La présence du zéro terminal est une difficulté similaire à une division qui requiert une certaine longueur de calcul. L'échec est donc lié au zéro. De plus, l'ordre de grandeur initial n'est pas maîtrisé : les autres difficultés s'ajoutent ainsi à ce problème. Dès le départ, l'apprentissage de la division se heurte au problème primordial du sens initial requis pour le calcul, c'est-à-dire l'évaluation du premier chiffre du quotient.

Au C.M.2, les premiers obstacles concernent les divisions comportant des diviseurs à trois chiffres et celles où les dividendes sont inférieurs aux diviseurs. Le problème de l'évaluation de l'ordre de grandeur initial reste considérable, ainsi que celui du calcul du zéro intercalaire dans la partie décimale du quotient. Dans la catégorie des divisions les plus réussies, on relève celles qui possèdent des zéros intercalaires et terminaux au quotient. Pour les élèves de C.M.2, période à laquelle l'apprentissage se centre sur l'introduction des décimaux, le choix de la position de la virgule n'a pas de cohérence avec l'ordre de grandeur requis du quotient. Les principaux mécanismes sont tout de même mieux installés que dans les autres niveaux de classe étudiés.

Il n'en est pas de même en sixième, car ces divisions sont réussies de façon plus massive. Les divisions les plus réussies sont composées d'un chiffre au diviseur seulement. On retrouve aussi des problèmes liés au positionnement de la virgule au quotient, ainsi que ceux relatifs aux divisions dont le dividende est inférieur au diviseur. L'échec, globalement plus important en classe de C.M.2 offre des résultats très contrastés par rapport à ceux que l'on obtient en classe de sixième. Les enfants issus de la classe de sixième, ont des performances limitées à cette période d'acquisition. Ce phénomène demeure éphémère, dans la mesure où, un an après, les taux de réussite sont brutalement accrus pour les mêmes divisions. Pour ceux qui sont en classe de sixième, le positionnement de la virgule juste avant, ou juste après le zéro, semble être le critère commun des similarités d'échec observées. Le problème de la virgule engendre d'une façon plus globale des ruptures dans l'ordre des difficultés du protocole considéré.

En cinquième, les difficultés sont plus généralisables à la conception du zéro. La résolution de l'opération tend à appartenir au domaine des souvenirs, d'où des résultats fort inégaux.

En général, le mécanisme initial consistant à évaluer l'ordre de grandeur du dividende par rapport au diviseur est une difficulté qui vient se rajouter à d'autres caractéristiques d'échec, et ceci pour nos quatre niveaux de classe considérés. La division ne se réduit pas à un simple algorithme dont l'apprentissage serait facilité par la répétition des tâches associées.

Notre étude nous permet de souligner par ailleurs les différences de réussite selon le sexe

des élèves, ou la soustraction posée ou non posée sous le dividende partiel. Les garçons posséderaient une plus grande maîtrise et une plus grande rapidité d'exécution pour les divisions les plus complexes. Par ailleurs, les filles réussissent davantage certaines particularités comme le zéro au quotient entre autres. Le fait de poser la soustraction favorise la réussite aux divisions d'une façon générale. Seuls, les enfants qui maîtrisent l'algorithme sont capables d'effectuer une soustraction mentale qui suppose des capacités d'abstraction importantes.

Nos résultats montrent que la suite d'opérations que comporte une division est effectuée sans que le sujet comprenne les raisons de ce qu'il fait. Avec une répétition fréquente cependant, on arrive à comprendre certaines choses, les conditions d'une vraie automatisation étant non réunies. L'algorithme de la division, s'il se raffine de conditions particulières, comme les zéros au quotient, par exemple, va engendrer des actions spécifiques. L'idée d'obtenir des choses qui vont se dégénérer dans l'usage, est la preuve que l'algorithme n'est pas acquis, le schème quant à lui, est celui qui réussit. L'ensemble des classes d'erreurs (et des relations dissymétriques entre elles) de l'algorithme de la division écrite, recueillies grâce aux méthodes d'analyse de données telles l'analyse hiérarchique, l'analyse implicative et l'analyse factorielle de données, donne des résultats qui s'approfondissent dans une perspective d'enrichissement didactique.

Les contraintes liées à l'exécution de l'algorithme, et les erreurs constatées chez les élèves gouvernent le sens de la division. Nous retrouvons quelques constats dans l'étude historique de l'algorithme (incapacité de concevoir un dividende inférieur au diviseur par exemple). Ces contraintes ne sont pas identiques mais elles nous servent de point de départ pour analyser les problèmes qui motivent l'introduction des concepts en cause, et par extension les processus d'enseignement. "*C'est l'analyse épistémologique (pas nécessairement historique à ce niveau, même si l'approche historique permet de saisir l'aspect nécessairement historique) qui est au premier chef concerné par ces questions*" (Artigue, p.246, 1991).

CONCLUSION GENERALE

Notre étude de l'histoire de la division permet de distinguer toute une série d'obstacles épistémologiques à l'installation de cette notion : la division est un algorithme difficile, qui installe chez les enfants des schèmes résistants, et qui continue à se manifester par des erreurs, certaines, nous l'avons vu étant récurrentes. Les obstacles épistémologiques qui nous intéressent pour l'enseignement sont ceux qui apparaissent actuellement comme inévitables : soit parce que la connaissance-obstacle est fatalement construite par l'élève au cours de son développement cognitif, ou bien parce qu'elle doit être enseignée pour servir d'appui aux connaissances futures de l'élève.

L'histoire montre bien combien cette construction a été lente, difficile, et quelles ont été les résistances qu'elles a rencontrées. L'histoire nous permet d'étudier aussi les situations d'apprentissage d'enseignement actuellement.

On tente ainsi d'expliciter comment le concept de division est venu jusqu'à nous, et d'où il vient, et on se fabrique une réponse plus ou moins plausible ou séduisante, mais sans savoir comment il faut s'y prendre pour obtenir une réponse vraie. Pour schématiser cet état de choses, cela montre la coexistence simultanée de plusieurs perspectives. L'histoire des mathématiques entre dans le débat afin d'éclaircir la genèse du statut dans la pensée enfantine.

L'idée de la division qui a prévalu depuis toujours (sauf pour les Egyptiens), jusqu'au début de ce siècle environ, est l'incapacité de concevoir une division dont le dividende est inférieur au diviseur. La notion d'indivisibilité n'est pas d'ailleurs en soit un caractère absolu, ni pour l'individu, ni pour l'unité. L'idée d'unité est bien plus générale que celle d'individu : elle est le point de départ des sciences mathématiques. Elle introduit par extension, un problème important, que nous avons constaté dans notre analyse (exemple : inconcevabilité de résoudre une division dont le résultat ne "s'achève pas", distinction du contenu et du discontinu ?). Lorsqu'on divise un objet, celui-ci se modifie, sa division atteint toujours une certaine limite. Ainsi la division peut s'arrêter plus ou moins tôt :

"*Si l'on divise une pomme en deux, chaque moitié peut encore évoquer la pomme. On peut diviser aussi un mouton en deux, mais ceci exige un changement de point de vue et donc une transformation de l'objet. Ce n'est plus le mouton du berger, que de ce point de vue on ne pourrait pas diviser, mais le mouton du boucher*" (Parrat-Dayan, Vonèche, 1991).

L'apparition et la résistance des obstacles épistémologiques dans l'histoire des concepts considérés, comme ici celui de la division, et l'observation de conceptions analogues chez les élèves nous a intéressés. Mais cette analyse ne peut apporter à elle seule l'observation de toutes les résistances de diverses conceptions chez les élèves actuels. Nous constatons avec Artigue (1991)

que "les noeuds actuels de résistance sévère correspondent souvent aux points où un obstacle d'origine épistémologique historique intervient renforcé par un obstacle d'une autre origine, en particulier un obstacle d'origine didactique" (p.254).

L'ensemble des réductions algorithmiques constatées par l'usage imprime le fonctionnement du système d'enseignement. L'enseignement rencontre des difficultés liées à la mise en place de l'enseignement de l'algorithme de la division, et contourne ces difficultés en fournissant des démarches pas à pas du déroulement de l'algorithme, suivies de fonctionnements répétitifs visant à systématiser une pratique. L'enseignement s'organise dès lors autour d'une organisation de répétition d'un certain type de tâches monotones car identiques.

"Il est dans ces conditions raisonnable de faire l'hypothèse que la persistance constatée d'erreurs liées à cette réduction monotone est tout autant le produit de ces contraintes didactiques que de contraintes épistémologiques. Compte tenu des disparités entre les conditions des genèses historiques et scolaires, il semble même raisonnable de faire l'hypothèse de l'existence pour l'enseignement actuel de noeuds de résistance qui fonctionnent comme ont fonctionné les obstacles épistémologiques dans le développement des mathématiques, sans qu'il soit possible pour autant de leur attribuer historiquement le statut d'obstacle. Ceci nous renvoie inévitablement, dans une démarche parallèle à celle de Bachelard, au-delà de l'identification des obstacles dans l'histoire ou l'apprentissage de telle ou telle notion, à une identification des processus producteurs d'obstacles en mathématiques" (Artigue, p.255, 1991).

Les régularités mises en évidence amènent le chercheur à se poser des questions en termes d'identification de ces obstacles. Notre étude expérimentale a voulu mettre en évidence quelques erreurs récurrentes, et montrer qu'elles s'organisent autour de conceptions.

Une des résistances à laquelle nous nous sommes attachés le plus, est celle de l'incapacité à concevoir une division avec un dividende inférieur au diviseur qui est au-delà d'une erreur, une connaissance qui produit des réponses adaptées selon le contexte dans lequel elle se produit.

En effet, la résolution de problèmes passe par le recours à des procédures que nous mettons en oeuvre de manière le plus souvent quasi automatiques et inconscientes. Ces procédures, ou algorithmes, sont des séquences d'actions et/ou d'opérations élémentaires qui, lorsqu'on les applique en en respectant scrupuleusement l'ordre, conduisent, sauf erreur de calcul, à la solution. Leur suite des conduites, leur ordre de succession et le type d'enchaînement qui les relie, que cela soit de façon linéaire, progressive, ou hiérarchique sont essentiels pour la suite à donner à notre recherche.

Les schèmes qui conduisent l'action de l'élève, s'analysent par l'action de l'élève et par les invariants que nous avons étudiés :

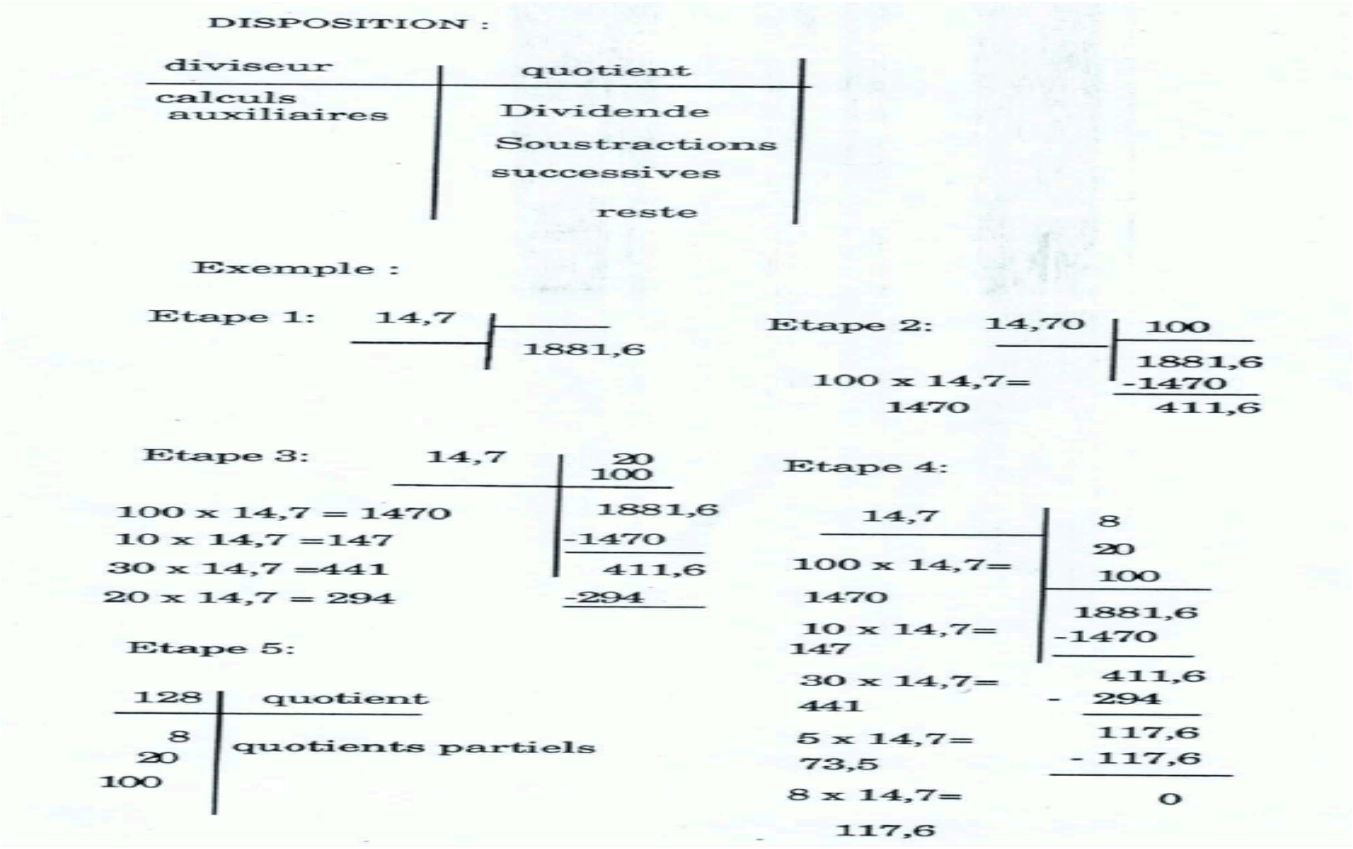
-anticipations (cas du zéro intercalaire au quotient),

-invariants opératoires (cas du dividende d'étape inférieur au diviseur),

-règles d'actions (cas de la virgule à placer à tel ou tel moment).

Ces questions nous renvoient, au-delà de l'attribution d'obstacle épistémologique, à telle ou telle difficulté rencontrée par l'enseignement, à la recherche, dans le fonctionnement de la connaissance, de mécanismes producteurs d'obstacles, et par extension, de l'intervention didactique possible.

Une autre méthode actuelle pour effectuer la division est actuellement enseignée à l'école Michelet de Talence (Brousseau, p. 282, 1987). Sa disposition ressemble à "la division anglaise". "Elle permet de conserver le sens de la division employant des soustractions répétées, de contrôler l'ordre de grandeur du quotient dès la première soustraction, et de celui des nombres soustraits, de permettre d'éventuels tâtonnements et des calculs intermédiaires". Nous choisissons de reproduire ici la disposition de cette méthode :



Cette méthode est enseignée dès le CM1

Une construction stable des invariants opératoires est essentielle dans l'acquisition des relations mises en oeuvre dans l'algorithme. Il convient d'identifier les invariants qui sont nécessaires, au sein d'un champ conceptuel, pour opérer sur les signifiés et les signifiants de manière à analyser l'appropriation d'un savoir comme la division. La représentation conceptuelle de la division s'identifie avec l'analyse des signifiés. La correction des erreurs par le maître induit à considérer son rôle comme celui d'un correcteur ou d'un évaluateur. "Il y a un hiatus épistémologique important entre la fonction que le didacticien voudrait faire jouer à l'erreur (exploiter l'erreur pour faire progresser la construction du sens), et celui que le maître lui reconnaît d'emblée (une lacune à annuler pour que l'élève fasse juste)" (Portugais, p. 204, 1992).

Un des prolongements possibles de cette recherche est de travailler sur des corpus de pratiques pédagogiques et du travail des erreurs par le maître. Le travail sur l'erreur peut permettre à l'enseignant de redonner à l'élève la responsabilité du contrôle du sens sur l'opération de division.

L'approche a-didactique est une démarche qui suit une logique de conflit cognitif, car le maître met l'élève dans des situations qui confrontent l'élève aux limites de ses connaissances : "*L'a-didactique tend à dévoluer le plus complètement possible à l'élève la charge du travail de l'erreur*", (Portugais, p.206, 1992).

Nous envisageons d'étudier les stratégies de l'élève en fonction des situations, de manière à identifier des organisations différentes de sa conduite. Ce travail est compatible avec un retour sur cette recherche pour le diagnostic de l'erreur.

Notre hypothèse est que la dégénérescence observée de l'algorithme se traduit par la mise en oeuvre de schèmes d'action partiellement erronés. La formation des professeurs voudrait que des moyens leur soient proposés pour gérer ces erreurs : notamment il semble nécessaire que les enseignants invitent les formés à mettre en place une démarche plus exploratoire.

Le principal concept théorique sur lequel est bâti notre partie empirique est celui de schème. De lui dépend l'analyse des erreurs, et par extension de l'analyse du fonctionnement cognitif du sujet mis en situation d'effectuer des divisions. Nous avons voulu, modestement, en dégager la pertinence par la contribution que notre expérimentation a voulu y apporter. Nous dirons aussi que ces résultats, porteurs d'interprétations, ne sont pas représentatifs de toutes les compétences cognitives développées par l'élève. Les questionnements qui en sont issus formeront l'essence de notre réflexion future.

BIBLIOGRAPHIE

AG ALMOULOUD, S. (1991). Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve : des séquences didactiques pour l'enseignement de la démonstration, *Recherches en didactique des Mathématiques,* Vol. 12, n°2.

AG ALMOULOUD, S. (1992). L'ordinateur, outil d'aide à l'apprentissage de la démonstration et de traitement de données didactiques, *Thèse de doctorat de l'Université de Rennes I*, Rennes.

ARTIGUE, M. (1991). Epistémologie et didactique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, La Pensée sauvage éditions, pp 241-286, Vol 10/2.3.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, VRIN.

BALL, D. (1990). Propective elementary and secondary teachers' understanding of division, *Journal for Research on Mathematics Education,* 21, 2, 132-144.

BEHR, M. & HIEBERT, J. (Eds) (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*, Reston, VA, NCTM.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. and SILVER, E. (1983). *Rational number concepts and processes*, Academic Press, Orlando, U.S.A.

BELL, A., FISHBEIN, E., GREER, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problem structure and context, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 15, p. 129-147.

BIDEAUD, J., MELJAC, C., FISCHER, J-P. (Eds.). (1991). *Les chemins du nombre,* Dunod.

BROUSSEAU, G. (1989). Eléments pour l'étude du sens de la division, Article occasionnel n°6, *Tirage IREM* , Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, Vol. 7.2, pp. 33-115.

BROUSSEAU, G. (1989). La relation didactique : le milieu, *Article n°4, IREM,* Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1980). L'échec et le contrat, *Revue Recherches,* n° 41, Septembre.

BROUSSEAU, G. (1990). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, *Article occasionnel n°5, Tirage IREM,* Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage : Grenoble,Vol. 4.2.

BROUSSEAU, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, *I.R.E.M.,* Université Bordeaux I, Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1983). Petit panorama de la didactique des mathématiques. *2ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 5-17 juillet, Orléans 1982. Ed. *IREM* Orléans.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, Vol. 2.1, *Recherches en didactique des mathématiques*.

BROUSSEAU, G. (1987). Représentation et didactique du sens de la division, Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Actes du colloque de Sèvres pp.47-64.

BROUSSEAU, G. (1990). Une expérience d'épistémologie sur l'enseignement des décimaux, *Article n°7, IREM,* Bordeaux.

BROUSSEAU, G., (1990). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de Collège, *Publication interne I.R.M.A.R.,* Rennes.

BROWN, J.-S., VAN LEHN, K. (1980). Toward a generative theory of bugs in procedural skills, In Carpenter T., Moser J., and Romberg T., (eds).*Addition and substraction: a cognitive perspective,* Hillsdale, NJ Lawrence, Elbaum Associates.

BRUNER, J. (1983). *Savoir-faire, savoir dire*. Paris : Presses Universitaires de France.

BRUN, J., CONNE, F., RETSCHITZKI (1988). L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques, *Projet subventionné par le Fond National de la Recherche Scientifique*, Suisse, projet FNRS, n°11. 25448.88.

BUTLEN, D. (1985). Introduction de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels, *Cahier de didactique des mathématiques*, I.R.E.M. : Paris, n°19.

CANGUILLEM, G. (1987). *Etude d'histoire et de philosophie des sciences*, Vrin, Paris.

CARPENTER, T-P., MOSER, J-M., ROMBERG, T-A. (Eds.). (1982). *Addition and subtraction:*

A cognitive perspective, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

CARPENTER, T-P., MOSER, J., (1983). The acquisition of addition and substraction concepts, in Lesh and Landau (Eds), *The acquisition of mathematical concepts and processes* New York: Academic Press, pp 7-40.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1988). Sur la formation historique du temps didactique, I.*R.E.M. d'Aix-Marseille,* Cahier n°8.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir : rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique,* Grenoble.

CHEVALLARD, Y. et JULLIEN, M. (1983). Sur l'enseignement des fractions au collège, *Ingénierie, recherche, société, n°15, I.R.E.M.* d'Aix-Marseille.

COQUIN-VIENNOT, D. (1989). La notion de représentation-conception au service de l'enseignement d'un concept mathématique, *Publication interne I.R.M.A.R.,* Rennes.

Commission inter-IREM, (1989). Histoire et épistémologie des mathématiques, La démonstration mathématique dans l'histoire, *Actes du 7ème colloque, IREM* de Besançon et de Lyon, 12 et 13 mai 1989.

CONNE, F. (1988). Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol.9.

CONNE, F. (1987). *Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire,* Lausanne, Conne-Couturier Noverraz.

CONNE, F., BRUN, J. (1990). Content and process: the case of teaching written calculation at primary school, *Paper for acts of symposium: responsible and effective*, Fribourg.

CONNE, F. (1984). Une épreuve de calcul en première primaire, Interaction didactique, *Cahier n°6 F.P.S.E.*, Genève.

CONNE, F., BRUN, J. (1991). Analyse de brouillons de calcul d'élèves confrontés à des items de divisions écrites, Proceedings of P.M.E. XV. International group for the psychologiy of mathematics education, Assisi, Italy, 29 juin- 4 juillet 1991.

DAHAN-DALMEDICO, A. PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques*, Editions du Seuil.

DHOMBRES, J. (1992). *L'école normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, Dunod.

DOUADY, R. (1984), Didactique des mathématiques, article Mathématiques, *Encyclopédia Universalis,* Paris.

DOUADY, R. et ARTIGUE, M. (1986). La didactique des mathématiques en France, *Revue Française de Pédagogie*, INRP : Paris, n° 76, pp. 69-88.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage : Grenoble, Vol. 7.2,

DOUADY, R. (1986). Rapport enseignement apprentissage : dialectique outil-objet, jeux de cadres, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, *I.R.E.M :* Université Paris VII, n° 3.

EHRLICH, S. (1985). Les représentations, *Psychologie Française,* Ed. Armand Colin, Tome 30 3/4.

FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre*, Neuchâtel, Paris : Delachaux & Niestlé.

FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M., MARINO, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.16, n°1, 3-17.

FUSON, K-C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York. Springer-Verlag.

GAUTUN, R. (1991). Quelle place pour la formation professionnelle des maîtres ? *Publication interne I.R.M.A.R. :* Rennes.

GELMAN, R., GALLISTEL, C.R. (1978). *The child's understanding of number,* Cambridge, MA: Harvard University Press.

GINSBURG, H-P. (Ed.). (1983). *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

GRAEBER, A-O., TIROSH, D., GLOVER, R. (1988). Misconceptions in solving verbal broblems in multiplication and division, *Educational Studies in Mathematics*.

GRAS, R. (1979), Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques, *Thèse d'Etat*, Rennes I.

GRAS, R., LARHER, A. (1989). La quasi-implication : une méthode d'analyse de relations non-symétriques entre attributs et classes d'attributs, *Publication interne I.R.M.A.R.,* Rennes.

GRAS, R., FONTAINE M-D., LARHER A., NICOLAS A., SIMON, A. (1988). Le micro-ordinateur, outil de révélation et d'analyse du raisonnement déductif de l'élève, *Publication interne I.R.M.A.R.,* Rennes.

GRAS, R., LARHER, A., (1991). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données didactiques, *Publication interne I.R.M.A.R.*, Rennes.

GRAS, R. (1983). Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie, *Petit x*, n° 1, Ed. IREM Grenoble.

GRECO, P., (1962). Quantité et qualité : Nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles. In P. Gréco & A. Morf (Eds.), *Structures numériques élémentaires* Paris : P.U.F, pp. 1-70.

GRECO, P. (1991), *Structures et significations*., Paris : E.H.E.S.S.

GREER, B. (1985). Nonconservation of multiplication and division involving decimals, *Journal for Research in Mathematics*, Brief Report , vol. 16, n° 1, 37-45.

GUIET, J. (1994). Algorithmes et schèmes: cas de la division, *Recherches en didactiques des Mathématiques*, numéro spécial.

GUIET, J., (1993). "L'algorithme de la division est-il un algorithme *?* ", *Publication de l'I.R.M.A.R.* (Institut de Recherche Mathématique de Rennes), Université de Rennes I.

GUIET, J., CONNE F. (1989). "Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques", *Actes de la Ve Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* pp 51 à 57.

GUITEL, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion.

HANTOUCHE, A-L., (1984). Les problèmes posés par l'acquisition des nombres décimaux, *Thèse, E.H.E.S.S.*

HARLE, A., (1984). L'arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXe siècle, *Thèse de Doctorat de 3ème cycle en Didactique des Mathématiques,* Université de PARIS VII.

HART, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*, Alden Press : Oxford, London, 11-16.

HART, K. (1983). From whole numbers to fractions and decimals, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage : Grenoble, Vol 1-1.

HART, K. (1988). *Ratio and proportion in the middle grades, The national council of teachers of mathematics,* Reston, Virginia.

IFRAH, G. (1985). *Les chiffres, ou l'histoire d'une grande invention*, Laffont, Paris.

INHELDER, B., SINCLAIR, H., BOVET, M. (1974). *Apprentissage et structure de la connaissance,* Paris, P.U.F.

JOSHUA, S., DUPIN, J. (1989). *Représentation et modélisation, le débat scientifique dans la classe et l'apprentissage de la physique*, Peter Lang, Berne.

KARPLUS, R., PULOS, S. (1983). *Proportional reasoning of early adolescents, in Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, Orlando, U.S.A.

KOUBA, V-L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems, *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. n° 20, n° 2, 147-158.

LABORDE, C. (1988). Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* I.R.E.M. de Strasbourg, pp. 75-93.

LABORDE, C. (1985). Quelques problèmes d'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, *For the Learning of Mathematics*, 5-3, novembre 1985, pp. 27-34.

LARHER, A. (1991). Implication statistique et applications à l'analyse de démarches de preuve mathématique, *Thèse de l'Université de Rennes I.*

LEGRAND, M. (1988). L'introduction du débat scientifique en situation d'enseignement, *Publication interne I.R.M.A.R., Rennes*.

LERMAN, I-C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod.

LERMAN, I-C., GRAS, R., ROSTAM, H. (1981). Elaboration et évaluation d'un indice d'application pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et Sciences Humaines* n°74, pp 5-35 et n°75, pp 5-47.

LESH, R., & LANDAU, M. (Eds). (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York : Academic Press.

LEON, A., CAMBON, J., LUMBROSO, M., WINYKAMMEN, F. (1977). *Manuel de*

psychopédagogie expérimentale, P.U.F., Paris.

LOEWENBERG, BALL, D. (1990). Prospective Elementary and Secondary Teacher's understanding of division, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21.

MARTINAND, J-L. (1983). Questions pour la recherche : la référence et le possible dans les activités scientifiques scolaires, *Recherches en Didactique de la Physique : Les Actes du Premier Atelier International,* La Londe des Maures, 1983, Ed. CNRS, pp. 141-154.

MENNINGER, K. (1969). *Number words and number symbols*, Cambridge, Mass., MIT press.

MIALARET, G. (1985). *Introduction aux sciences de l'éducation,* Unesco, Delachaux et Niesté.

MLHAUD, N. (1980). Le comportement des maître face aux erreurs des élèves, Mémoire de D.E.A., *Etudes en Didactique des Mathématiques, I.R.E.M*. de Bordeaux.

MUGNY, G. (Eds.). (1985). *Psychologie sociale du développement cognitif,* Peter Lang, Collection Exploration, Berne.

NESHER, P. (1986). Learning mathematics : A cognitive perpective, *American Psychologist*., pp. 1114-1122, Vol.41 (10).

NESHER, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and substraction word problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds), *Addition and substraction. A cognitive perspective*. (pp 25-38), Hillsdale, N.J : Erlbaum.

PERRET-CLERMONT, A-N., SCHUBAUER-LEONI, M-L., BRUN, J., CONNE, F. (1982). Décontextualisation et recontextualisation du savoir dans l'enseignement des mathématiques à de jeunes enfants, *Interactions Didactiques*, n° 1, Neuchâtel, Genève, Suisse.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (1992). Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux C.M.- 6ème, *Thèse de doctorat d'état, Publication de l'Université PARIS VII*, Paris.

PIAGET, J. (1957). *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard.

PIAGET, J. (1977). *Epistémologie génétique et équilibration,* Delachaux et Niestlé.

PIAGET, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique*,Paris : P.U.F, Vol. 1.

PIAGET, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F.

PIAGET, J. (1975). *Les mécanismes perceptifs*, P.U.F., Paris.

PIAGET, J. (1975). *La construction du réel chez l'enfant*, P.U.F., Paris.

PIAGET, J. (1974). *Réussir et comprendre*, P.U.F., Paris.

PORTUGAIS, J. (1992). Didactique des mathématiques et formation des enseignants ; le cas des erreurs de calcul, *Thèse n°195, Genève*.

RESNICK, L-B. (1982). Syntax and semantics in learning to substract. In T. Carpenter, Moser J., and Romberg (Eds), *Addition and substraction: A cognitive perspective*, Hillsdale, NJ Lawrence Elbaum Associates.

REVUZ, A. (1980). *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques* ? PUF, Paris.

RICCO, G. (1992). Psychologie cognitive et didactique : Constitution d'une nouvelle approche théorique concernant l'appropriation des connaissances scolaires, *Habilitation à diriger des recherches, Note de synthèse*.

RICCO, G., ROUCHIER, A., VERGNAUD, G. (1983). Représentation du volume et arithmétisation. Entretiens individuels avec les élèves de 11 à 15 ans, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 4.1.

RILEY, M-S., GREENO, J-G., & HELLER, J-I., (l983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

ROBERT, A., et ROBINET, J. (1989). Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement, *Cahier de DIDIREM, n° 1, I.R.E.M.,* Université Paris VII.

ROBERT, A. et ROBINET, J. (1989). Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels, *Cahier de DIDIREM, n° 4, I.R.E.M.,* Université Paris VII.

ROGALSKI, M. (1989). Enseigner des méthodes en mathématiques, *Publication interne I.R.M.A.R.,* Rennes.

SALIN, M-H. (1976). Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire, *Etudes en didactique des mathématiques, Mémoire de D.E.A*.

SMITH, D.-E. (1958). *History of mathematics,* New York, Dover publications Inc.

SMITH, D-E. (1970). *Rara arithmetica, a catalogue of the arithmetics written before the year*

1601, Chelsea publishing company, New York.

TEULE-SENSACQ, P., VINRICH, G. (1982). Résolution de problèmes de division au Cycle Elémentaire dans deux types de situations didactiques, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.13, pp. 177-203.

TIROSH, D., GRAEBER, A.O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, n°2, pp.98-108.

VAN LEHN, Kurt. (1990). *Muid bugs, the origins of procedural misconceptions*, the MIT Press, Cambridge, Ma.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg, (Eds). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ : Erlbaum.

VERGNAUD, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie Française*, tome 30, 3-4.

VERGNAUD, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie,* n°56, 79-86.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10, 2-3, pp. 133-170.

VERGNAUD, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Bern : Peter Lang.

VERGNAUD, G. (1987). Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, In J. Piaget, P. Mounoud & J.P. Bronckart (Eds.), Psychologie, *Encyclopédie de la Pléïade* (pp. 821-844), Paris : Gallimard.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative Structures, In R. Lesh, & M. Landau, (Eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (pp 127-174). New York : Academic Press.

VERGNAUD, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2.2, La Pensée Sauvage, Grenoble , 1981.

VERGNAUD, G. (1988). Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, p.33-55.

VERGNAUD, G. (1987). Réflexion sur les finalités de l'enseignement des mathématiques, *Gazette*

*des Mathématicien*s, n° 32, pp. 54-61.

VERGNAUD, G., RICCO, G. (1977). Psychogenèse et programme d'enseignement : différents aspects de la notion de hiérarchie, *Bulletin de Psychologie*, n° 330, 1976-1977, pp. 877-882.

VERRET, M. (1975). *Le temps des études*, Librairie Honoré Champion, Paris.

VYGOSKY, L. (1962), *Pensée et langage,* Paris: Editions Sociales, Messidor, 1962.

YOUSHKEVITCH, A.P. (1976). *Les mathématiques arabes*, Paris, Vrin.