



**HAL**  
open science

# Ondes élastiques dans les solides isotropes

Christophe Coste

► **To cite this version:**

| Christophe Coste. Ondes élastiques dans les solides isotropes. Master. France. 2016. cel-01405718

**HAL Id: cel-01405718**

**<https://u-paris.hal.science/cel-01405718>**

Submitted on 30 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# M2 – Spécialité Acoustique et Fluide

## Ondes élastiques dans les solides isotropes

*Christophe Coste*

(christophe.coste@univ-paris-diderot.fr)

Laboratoire MSC, UMR CNRS 7057 & Université Paris-Diderot

24 octobre 2016

- I Milieux élastiques isotropes
- II Ondes élastiques
- III Reflexion/Transmission à une interface plane
- IV Quelques solutions en élastodynamique
- V Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

# I. Milieux élastiques isotropes

## Plan du Chapitre I

- 1 Déformation du milieu
- 2 Conservation de la masse
- 3 Tenseur des contraintes
- 4 Constantes élastiques
- 5 Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope

## 0. Rappels sur les tenseurs

Tenseur unité de rang 2, ou  $\delta$  de Kronecker :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j, \\ \delta_{ij} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tenseur complètement antisymétrique de rang 3 :

$$\begin{cases} \epsilon_{ijk} = 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ permutation paire de } (1, 2, 3), \\ \epsilon_{ijk} = -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ permutation impaire de } (1, 2, 3), \\ \epsilon_{ijk} = 0 & \text{si au moins deux indices sont répétés.} \end{cases}$$

Produit vectoriel : [Vérifier !]

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

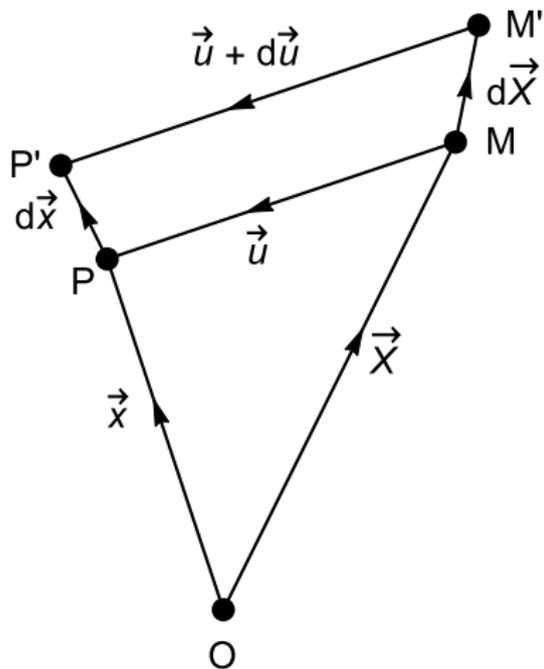
Double produit vectoriel :  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

En notations tensorielles : [Vérifier !]

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-1. Déformations du milieu (1/4)



État de référence : coordonnées  $\mathbf{X}$   
État déformé : coordonnées  $\mathbf{x}$   
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$

$$MM' \equiv dL = (dX_i dX_i)^{1/2}$$

$$PP' \equiv dl = (dx_i dx_i)^{1/2}$$

Il y a *déformation* du matériau si  $dL \neq dl$ , ce qui exclue les *translations* et *rotations* qui, elles, conservent les distances.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-1. Déformations du milieu (2/4)

$$dl^2 - dL^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i, \text{ avec } dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j, \text{ donc}$$

$$dl^2 - dL^2 = \underbrace{\left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right)}_{\text{Tenseur d'Almansi } 2A_{ij}} dx_i dx_j \quad (\text{formulation Eulérienne})$$

De façon équivalente en formulation Lagrangienne

$$dl^2 - dL^2 = \underbrace{\left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)}_{\text{Tenseur de Green } 2G_{ij}} dX_i dX_j \quad (\text{formulation Lagrangienne})$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-1. Déformations du milieu (3/4)

Il est intéressant d'utiliser plutôt le **champ de déplacement**  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ .

On a  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ , soit (Tableau)

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

*[Exercice : faire le même calcul pour le tenseur de Green, et vérifier que le terme quadratique est de signe opposé.]*

Pour de petites déformations, on néglige le terme quadratique et les deux descriptions deviennent identiques. On définit alors

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{Tenseur des déformations de Cauchy})$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-1. Déformations du milieu (4/4)

Variation générale du champ de déplacement :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = S_{ij} dx_j + \Omega_{ij} dx_j,$$

où

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k$$

s'exprime en fonction du vecteur tourbillon  $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$ . (Tableau)

Si  $\omega = 0$ , on a une déformation pure et  $du_i = S_{ij} dx_j$

Si  $S_{ij} = 0$ , on a localement une rotation solide du matériau.

À l'approximation linéaire, les deux opérations commutent.

Toujours à cette approximation, la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  sont

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\mathbf{u}}.$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-2. Conservation de la masse

Soit  $M$  la masse du matériau contenue dans un volume  $V_0$  (resp.  $V$ ) avec une densité  $\rho_0$  (resp.  $\rho$ ) dans l'état de référence (resp. déformé).

$$M = \int_V \rho(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}) dX_1 dX_2 dX_3$$

En faisant le changement de variables dans la première intégrale,

$$M = \int_{V_0} \rho[\mathbf{x}(\mathbf{X})] \underbrace{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}}_{\text{Jacobien}} dX_1 dX_2 dX_3$$

Or  $\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \approx 1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \implies \rho(\mathbf{x}) \approx \rho_0(\mathbf{X}) \left(1 - \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$  (Tableau)

$S \equiv \partial u_k / \partial x_k$  est la **dilatation**. Le tenseur des déformations s'écrit

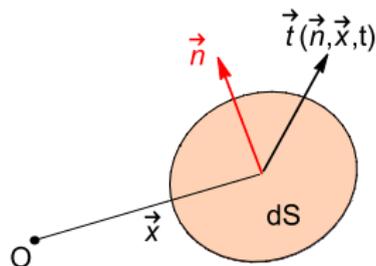
$$S_{ij} = \frac{1}{3} S \delta_{ij} + \bar{S}_{ij},$$

où  $\bar{S}_{ij}$  est la partie **déviatorique** ou déformation équivolumique.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-3. Tenseur des contraintes (1/5)

Les forces intermoléculaires sont des forces à courte portée : on considère qu'elles s'exercent en surface.



Force exercée par le solide du côté positif de  $\mathbf{n}$  sur le solide du côté négatif :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS$$

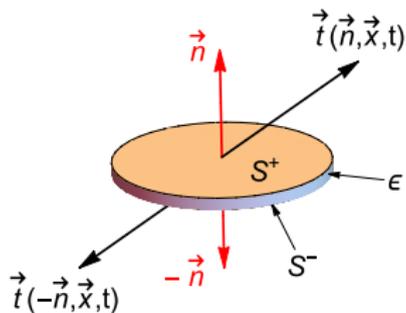
Loi de Newton pour un volume  $V$  limité par une surface fermée  $\partial V$

$$\int_V \mathbf{g} \rho dV + \int_{\partial V} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{a} dV$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-3. Tenseur des contraintes (2/5)

Équilibre d'un volume cylindrique de surface latérale  $\epsilon$  :



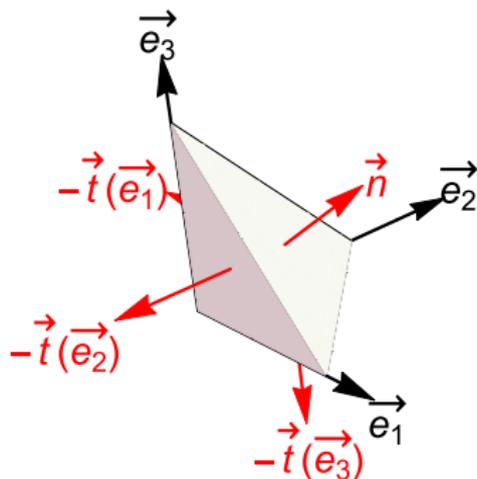
$$\int_{S^+} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS + \int_{S^-} \mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) dS = \mathcal{O}(\epsilon)$$

A la limite  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-3. Tenseur des contraintes (3/5)



Équilibre d'un tétraèdre  $OA_1A_2A_3$

- surface  $A_1A_2A_3$  :  $\epsilon^2$
- surface  $OA_1A_3$  :  $n_2\epsilon^2$
- surface  $OA_1A_2$  :  $n_3\epsilon^2$
- surface  $OA_2A_3$  :  $n_1\epsilon^2$

(Tableau)

Notons  $\mathbf{T}_i = \mathbf{t}(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = (T_{i1}, T_{i2}, T_{i3})$ , puis faisons le bilan des forces :

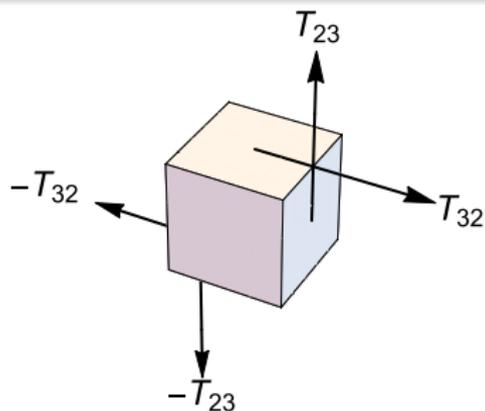
$$\mathcal{O}(\epsilon^3) = \epsilon^2 [\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + n_1 \mathbf{T}_1(-\mathbf{n}_1, \mathbf{x}) + n_2 \mathbf{T}_2(-\mathbf{n}_2, \mathbf{x}) + n_3 \mathbf{T}_3(-\mathbf{n}_3, \mathbf{x})]$$

On divise par  $\epsilon^2$  et on fait  $\epsilon \rightarrow 0$ , avec  $\mathbf{T}_i(-\mathbf{n}_i, \mathbf{x}) = -\mathbf{T}_i(\mathbf{n}_i, \mathbf{x})$  :

$$t_i = T_{ji}n_j \quad \text{donc } T_{ij} \text{ est un tenseur de rang 2}$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-3. Tenseur des contraintes (4/5)



Équilibre d'un cube infinitésimal :  
La somme des moments des forces  
appliquées est nulle

$$\left[ T_{32} \frac{dx_3}{2} + (-T_{32}) \left( -\frac{dx_3}{2} \right) \right] dx_1 dx_2 - \left[ T_{23} \frac{dx_1}{2} + (-T_{23}) \left( -\frac{dx_1}{2} \right) \right] dx_2 dx_3 = 0$$

d'où  $T_{23} = T_{32}$  et de même pour les autres composantes.

Le tenseur des contraintes  $T_{ij}$  est symétrique.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-3. Tenseur des contraintes (5/5)

Bilan : Loi de Newton

$$\int_V g_i \rho dV + \int_{\partial V} T_{ij} n_j dS = \int_V \rho a_i dV$$

Théorème de Green (ou théorème de la divergence)

$$\int_{\partial V} T_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV,$$

soit enfin :

$$\rho g_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho a_i = 0.$$

car  $V$  est un volume arbitraire.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-4. Constantes élastiques (1/4)

- Méthode : On calcule la puissance instantanée nécessaire pour déformer l'échantillon
- Remarque : L'état de référence ne peut être que l'état non déformé
- $WdV_0$  est le travail fourni pour déformer le matériau contenu dans le volume  $dV_0$  dans l'état de référence

$$\text{Travail total : } \int_{V_0} WdV_0 = \int_V \frac{\rho}{\rho_0} WdV \approx \int_V WdV$$

(Hypothèse de petites déformations :  $\rho/\rho_0 \approx 1$ .)

$$\int_V \frac{dW}{dt} dV = \int_V \rho g_i v_i dV + \int_{\partial V} t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) v_i dS - \frac{dE_C}{dt}$$

(la variation d'énergie cinétique ne représente pas une déformation du matériau)

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-4. Constantes élastiques (2/4)

- $\frac{dE_C}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho v_i^2 dV = \int_V \rho a_i v_i dV$
- $\int_{\partial V} t_i v_i dS = \int_{\partial V} (T_{ij} v_i) n_j dS = \int_V \frac{\partial (T_{ij} v_i)}{\partial x_j} dV$

Donc :

$$\int_V \frac{dW}{dt} dV = \int_V \underbrace{\left[ \rho g_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho a_i \right]}_{=0 \text{ (loi de Newton)}} v_i dV + \int_V T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

### Définition d'un matériau élastique :

Le travail  $W$  est une fonction des seules déformations élastiques  $S_{ij}$ .

- $W$  est indépendant des rotations et translations
- $W$  ne dépend pas de l'histoire de la déformation
- $W$  ne dépend pas du taux de déformation

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-4. Constantes élastiques (3/4)

$$\int_V \frac{dW}{dt} dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial S_{ij}} \frac{dS_{ij}}{dt} dV = \int_V T_{ij} \frac{d}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_V T_{ij} \frac{dS_{ij}}{dt} dV$$

où, pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que  $T_{ij}$  est un tenseur symétrique.

Le volume  $V$  étant quelconque,

$$T_{ij} = \frac{\partial W}{\partial S_{ij}}$$

Si  $S_{ij} = 0$ ,  $T_{ij}$  doit être nul. Donc  $W$  est, à l'ordre le plus bas en déformation, d'ordre 2. Comme c'est un scalaire, nécessairement

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$$

où  $c_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre 4.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-4. Constantes élastiques (4/4)

- A priori,  $c_{ijkl}$  a  $3^4 = 81$  composantes indépendantes.
- $S_{ij}$  et  $T_{ij}$  symétriques :  $c_{ijkl} = c_{jikl}$  et  $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ .  
Il reste donc  $6 \times 6 = 36$  composantes indépendantes.
- On peut donc noter  $c_{ijkl} = c_{\alpha\beta}$  où les indices Grecs prennent des valeurs de 1 à 6, avec par convention

$$(11) \leftrightarrow 1, (22) \leftrightarrow 2, (33) \leftrightarrow 3,$$

$$(23) = (32) \leftrightarrow 4, (31) = (13) \leftrightarrow 5, (12) = (21) \leftrightarrow 6.$$

- D'après l'expression de  $W$ ,  $c_{ijkl} = c_{klij}$  soit  $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$
- Tenseur  $6 \times 6$  symétrique :  $6 + 30/2 = 21$  composantes

$c_{ijkl}$  a donc au plus 21 composantes indépendantes.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (1/10)

Définition d'un milieu **isotrope** :

Un milieu est **isotrope** si, en son sein, **toutes les directions sont équivalentes**. Les tenseurs qui caractérisant ses propriétés physiques doivent alors être invariants sous l'action des rotations de l'espace. On parle de **tenseur isotrope**.

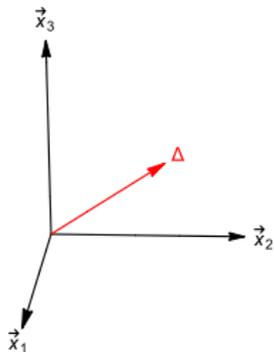
- Un liquide ou un verre sont **isotrope**
- Un cristal, au contraire, est **anisotrope**
- Beaucoup de matériaux courants sont composés de microcristaux orientés aléatoirement et sont de ce fait **isotropes**
- Un traitement métallurgique (laminage, extrusion) peut orienter les microcristaux et rendre le matériau **anisotrope**
- Le bois massif est **anisotrope** (orientation des fibres)
- ...

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (2/10)

21 composantes non nulles *a priori* [Vérifier !]

- $c_{1111}, c_{2222}, c_{3333}$
- $c_{1212}, c_{1313}, c_{2323}$
- $c_{1122}, c_{1133}, c_{2233}$
- $c_{1112}, c_{1113}, c_{2221}, c_{2223}, c_{3331}, c_{3332}$
- $c_{1123}, c_{2213}, c_{3312}$
- $c_{1312}, c_{2321}, c_{3231}$



Rotation N° 1 d'axe  $\Delta : x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_1$

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333}$$

$$c_{1212} = c_{1313} = c_{2323}$$

$$c_{1122} = c_{1133} = c_{2233}$$

Il suffit de faire la correspondance entre les coefficients  $c_{ijkl}$  et les coefficients  $c_{\alpha\beta}$ .

- $c_{1111}$  ( $c_{11}$ ),  $c_{2222}$  ( $c_{22}$ ),  $c_{3333}$  ( $c_{33}$ )
- $c_{1212}$  ( $c_{66}$ ),  $c_{1313}$  ( $c_{55}$ ),  $c_{2323}$  ( $c_{44}$ )
- $c_{1122}$  ( $c_{12}$ ),  $c_{1133}$  ( $c_{13}$ ),  $c_{2233}$  ( $c_{23}$ )
- $c_{1112}$  ( $c_{16}$ ),  $c_{1113}$  ( $c_{15}$ ),  $c_{2221}$  ( $c_{26}$ ),  $c_{2223}$  ( $c_{24}$ ),  $c_{3331}$  ( $c_{35}$ ),  $c_{3332}$  ( $c_{34}$ )
- $c_{1123}$  ( $c_{14}$ ),  $c_{2213}$  ( $c_{25}$ ),  $c_{3312}$  ( $c_{36}$ )
- $c_{1312}$  ( $c_{56}$ ),  $c_{2321}$  ( $c_{46}$ ),  $c_{3231}$  ( $c_{45}$ )

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (3/10)

Regardons les composantes du type :

- $c_{1112}, c_{1113}, c_{2221}, c_{2223}, c_{3331}, c_{3332}$
- $c_{1123}, c_{2213}, c_{3312}$
- $c_{1312}, c_{2321}, c_{3231}$

Rotation N° 2 : Axe  $\mathbf{x}_3$ , rotation de  $\pi/2$ . Donc  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{x}_2 \rightarrow -\mathbf{x}_1$ .

$$\begin{cases} c_{1113} \rightarrow c_{2223} \implies c_{1113} = c_{2223} \\ c_{2223} \rightarrow -c_{1113} \implies c_{1113} = -c_{2223} \end{cases} \implies c_{1113} = c_{2223} = 0$$

$$\begin{cases} c_{3312} \rightarrow -c_{3321} \implies c_{3312} = -c_{3321} \\ \text{or on a vu : } c_{ijkl} = c_{ijlk} \end{cases} \implies c_{3312} = c_{3321} = 0$$

$$\begin{cases} c_{3231} \rightarrow -c_{3132} \implies c_{3231} = -c_{3132} \\ \text{or on a vu : } c_{ijkl} = c_{klij} \end{cases} \implies c_{3231} = c_{3132} = 0$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (4/10)

On peut reprendre le raisonnement avec des rotations de  $\pi/2$  autour des axes  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ . Donc les seules composantes non nulles sont celles avec les quatre indices égaux, ou avec deux fois deux indices égaux.

Les composantes non nulles sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = \kappa \\ c_{1122} = c_{1133} = c_{2233} = \lambda \\ c_{1212} = c_{1313} = c_{2323} = \mu \\ c_{2112} = c_{3113} = c_{3223} = \mu \quad \text{car } c_{ijkl} = c_{jikl} \end{array} \right.$$

Soit :

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + (\kappa - \lambda - 2\mu) \nu_{ijkl},$$

où  $\nu_{ijkl} = 1$  si les 4 indices sont égaux et 0 sinon.

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (5/10)

Soient  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{w}$  4 vecteurs quelconques.

Puisque  $c_{ijkl}$  est un tenseur d'ordre 4, alors  $c_{ijkl}x_i y_j z_k w_l$  doit être un scalaire. Cette expression s'écrit

$$c_{ijkl}x_i y_j z_k w_l = \lambda x_i y_i z_j w_j + \mu (x_i z_i y_j w_j + x_i w_i y_j z_j) + (\kappa - \lambda - 2\mu) (x_1 y_1 z_1 w_1 + \dots)$$

Les trois premiers termes sont à l'évidence des scalaires, mais pas le dernier qui n'est pas invariant par rotation.

Prenons en effet  $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z} = \mathbf{w}$ . Le dernier terme vaut  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ . Soit  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ . Alors  $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 1/3$ .

Il existe une rotation qui transforme ce vecteur en  $\mathbf{x}' = (1, 0, 0)$ , et  $x_1'^4 + x_2'^4 + x_3'^4 = 1$ .

Il faut donc  $\kappa - \lambda - 2\mu = 0!$

[**Exercice** : Donner la forme général d'un tenseur isotrope de rang 2 (par exemple le tenseur des constantes diélectriques)]

En imposant l'invariance du tenseur  $A_{ij}$  sous la rotation N° 1 on trouve  $A_{11} = A_{22} = A_{33}$ .

Si on considère maintenant la rotation N° 2, on a  $A_{13} \rightarrow A_{23}$  et  $A_{23} \rightarrow -A_{13}$ . La seule possibilité est donc  $A_{13} = A_{23} = 0$ . De même  $A_{31} = A_{32} = 0$ . En prenant d'autres rotations d'axes  $x_1$  et  $x_2$  on annule ainsi tous les termes non diagonaux.

Les tenseurs isotropes de rang 2 s'écrivent donc

$$A_{ij} = A\delta_{ij}$$

où  $A$  est une constante.

La propriété physique correspondante est donc caractérisée par le scalaire  $A$ , dans un matériau isotrope. C'est le cas de la permittivité diélectrique, de la perméabilité magnétique, de la conductivité, etc...

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (6/10)

Le tenseur d'élasticité d'un **matériau isotrope** est donc

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les **coefficients de Lamé**, homogènes à des pressions

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$$

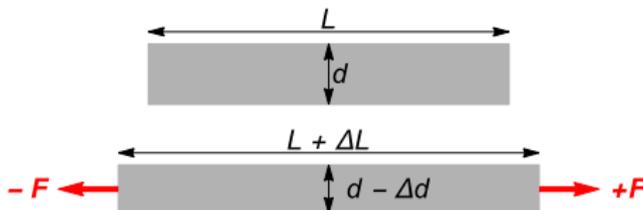
(Tableau)

$$S_{ij} = \frac{1}{2\mu} T_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{kk} \delta_{ij}$$

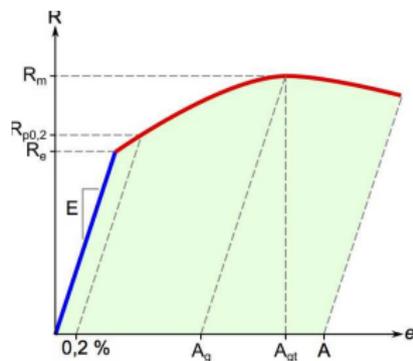
# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (7/10)

Module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$



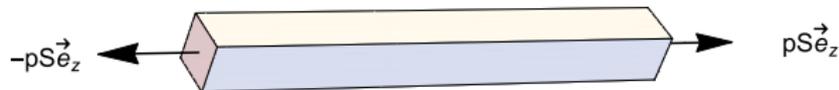
$$\frac{\Delta L}{L} \equiv \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad \frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta L}{L}.$$



# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (8/10)

Parallélépipède rectangle soumis à une extension selon son axe  $Oz$



Sur les cotés,  $F_i = T_{ij}n_j = 0$  avec  $n_j = n_x$  ou  $n_y$ . Donc seule  $T_{zz} \neq 0$ .  
Sur les faces,  $T_{zi}n_i = T_{zz} = p$ . Donc (en déformation homogène)

$$S_{zz} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} p, \quad S_{xx} = S_{yy} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p$$

(Tableau)

Module d'Young  $E$  :  $S_{zz} = p/E$ . Coefficient de Poisson  $\nu$  :  $S_{xx} = -\nu S_{zz}$ .

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (9/10)

On peut donc écrire

$$E = 2\mu + \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = 2\mu(1 + \nu)$$

soit

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Or

$$\lambda(1 - 2\nu) = 2\mu\nu,$$

donc

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)}(1 - 2\nu)$$

# I. Milieux élastiques isotropes

## I-5. Tenseur d'élasticité d'un milieu isotrope (10/10)

Aspect thermodynamique :

$$W = \frac{\lambda}{2}(S_{ii})^2 + \mu(S_{ij})^2 = \mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{2\mu}{3} \right) (S_{ii})^2$$

$\mu$  est le **module de cisaillement**.

$B \equiv \lambda + \frac{2\mu}{3}$  est le **module de compression**  $\frac{1}{B} \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)$  (Tableau)

Dans l'expression de droite, le premier tenseur est de trace nulle. Les deux termes carrés sont donc indépendants, et on en déduit

$$\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda \geq -\frac{2\mu}{3}$$

soit aussi

$$E \geq 0 \quad \text{et} \quad -1 \text{ (si } \lambda = -2\mu/3) \leq \nu \leq \frac{1}{2} \text{ (si } \mu = 0)$$

# II. Ondes élastiques

## Plan du Chapitre II

- 1 Équations du mouvement
- 2 Ondes planes
- 3 Quelques valeurs numériques
- 4 Cas général
- 5 Comparaison avec les fluides Newtoniens
- 6 Propagation de l'énergie
- 7 Ondes sphériques

## II. Ondes élastiques

### II-1. Équations du mouvement

Loi de Newton (en négligeant la gravité) :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Matériau élastique isotrope :

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad \text{et} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

(Tableau)

Equations de Navier :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$$

## II. Ondes élastiques

### II-2. Ondes planes (1/4)

La coordonnée  $x_1$  est définie par la normale aux plans d'onde.  
On cherche donc un déplacement élastique de la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, t)$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

Les équations de Navier donnent deux équations :

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},$$

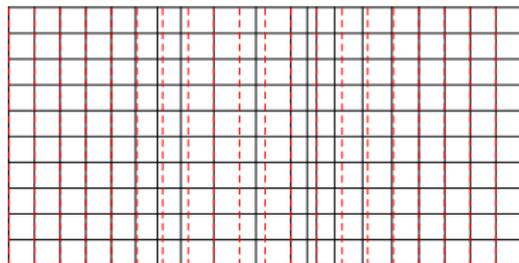
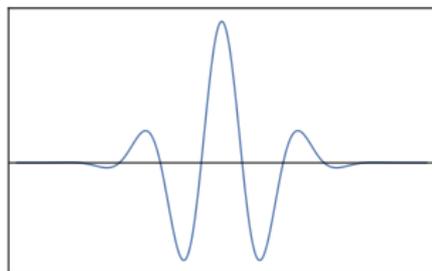
$$\rho \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x_1^2},$$

Il y a donc **deux modes acoustiques découplés**.

## II. Ondes élastiques

### II-2. Ondes planes (2/4)

Mode *longitudinal*.



Le déplacement est **parallèle** à la direction de propagation.

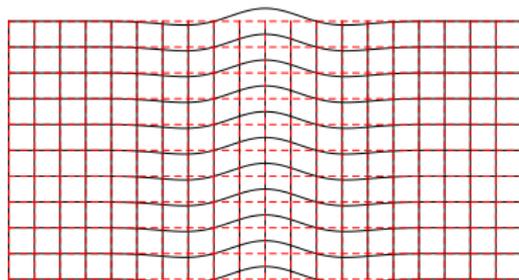
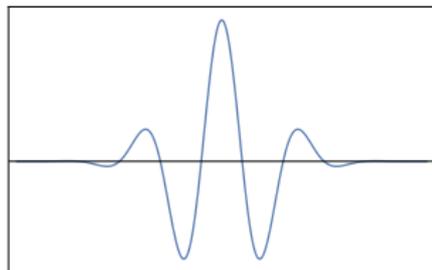
$$\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0, \quad V_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

La vitesse de l'onde est indépendante de la longueur d'onde :  
propagation **non dispersive**.

## II. Ondes élastiques

### II-2. Ondes planes (3/4)

Mode *transverse*.



Le déplacement est **orthogonal** à la direction de propagation.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad V_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

La vitesse de l'onde est indépendante de la longueur d'onde :  
propagation **non dispersive**.

## II. Ondes élastiques

### II-2. Ondes planes (4/4)

Vitesses de propagation en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson :

$$V_L^2 = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad V_T^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}$$

On en déduit que

$$\frac{V_L}{V_T} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}}$$

Il s'agit d'une fonction croissante de  $\nu$  sur le domaine  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ .

On en déduit  $V_L > \sqrt{4/3}V_T$  (pour  $\nu = -1$ ) et même  $V_L > \sqrt{2}V_T$  pour les matériaux les plus courants ( $0 \leq \nu \leq 1/2$ )

Les ondes longitudinales vont toujours plus vite que les ondes transverses.

## II. Ondes élastiques

### II-3. Quelques valeurs numériques

Matériau	Densité	$V_L$	$V_T$
	(g/cm <sup>3</sup> )	m/s	m/s
Laiton	8.6	4700	2100
Duralumin	2.79	6320	3130
Inox	7.9	5790	3100
Verre (flint)	3.88	3980	2380
Verre (crown)	2.24	5100	2840
Plexiglas	1.18	2680	1100
Nylon	1.11	2620	1070

Rappel : Dans l'air  $V_S \approx 340$  m/s, dans l'eau  $V_S \approx 1500$  m/s.

## II. Ondes élastiques

### II-4. Cas général (1/4)

#### **Théorème de Helmholtz :**

Soit  $\mathbf{u}$  une solution des équations de Navier dans un domaine fini  $\mathcal{D}$  de l'espace, pour  $t_1 < t < t_2$ . Alors il existe une fonction scalaire  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  et une fonction vectorielle  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , avec  $\nabla \cdot \psi = 0$ , telles que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \wedge \psi(\mathbf{x}, t).$$

(**Remarque :**  $\mathbf{u}$  représente trois degrés de liberté, le potentiel scalaire et le potentiel vecteur en totalisent 4. Il n'est donc pas surprenant de pouvoir imposer une condition supplémentaire à  $\psi$ )

Les équations de Navier deviennent (en intervertissant l'ordre des dérivations)

$$\rho \nabla \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho \nabla \wedge \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu [\nabla \Delta \varphi + \nabla \wedge (\Delta \psi)] + (\lambda + \mu) \nabla (\Delta \varphi)$$

## II. Ondes élastiques

### II-4. Cas général (2/4)

- Appliquons l'opérateur divergence à cette équation :

$$\Delta \left[ \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi \right] = 0$$

- Appliquons l'opérateur rotationnel à cette équation : (Tableau)

$$\Delta \left[ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \psi \right] = 0$$

Il n'est pas totalement évident que l'on puisse simplement « supprimer » l'opérateur Laplacien ! Il reste des fonctions de Laplacien nul, mais celles-ci peuvent être introduites dans une redéfinition des potentiels  $\varphi$  et  $\psi$ . La démonstration en a été faite par P. Duhem en 1898. (voir E. Sternberg, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 6, 34–50)

## II. Ondes élastiques

### II-4. Cas général (3/4)

On a donc en toute généralité :

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi = 0, \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \Delta \psi = 0$$

- Le champ  $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$  représente l'onde longitudinale.
- Le champ  $\mathbf{u}_T(\mathbf{x}, t) = \nabla \wedge \psi(\mathbf{x}, t)$  représente l'onde transverse.

On retrouve bien les deux expressions précédentes des vitesses de propagation sans faire l'hypothèse des ondes planes !

# II. Ondes élastiques

## II-4. Cas général (4/4)

### Note sur la terminologie :

#### Mode longitudinal, $V_L$

- Onde irrotationnelle
- Onde de dilatation/dilatation/compression
- Onde primaire ou onde P (car  $V_L > V_T$ )

#### Mode transverse, $V_T$

- Onde équivolumique
- Onde de cisaillement
- Onde secondaire ou onde S

## II. Ondes élastiques

### II-5. Comparaison avec un fluide Newtonien (1/3)

Equations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

Approximation linéaire :  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ,  $p = p_0 + \delta p$ ,  $\mathbf{v}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \delta \rho + \eta \Delta \mathbf{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

## II. Ondes élastiques

### II-5. Comparaison avec un fluide Newtonien (2/3)

- Composante transverse du champ de vitesse :  $\nabla \cdot \mathbf{v}_T = 0$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0,$$

normal pour des ondes équivolumiques, et

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_T}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{v}_T} \quad (\text{Équation de diffusion})$$

Dans un fluide Newtonien, le **mode transverse est diffusif!**

Il s'agit de **LA** différence fondamentale entre un solide et un fluide!

## II. Ondes élastiques

### II-5. Comparaison avec un fluide Newtonien (3/3)

- Composante longitudinale du champ de vitesse :  $\mathbf{v}_L = \nabla\phi$  (Tableau)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \Delta \phi + \underbrace{\left( \xi + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{terme d'atténuation}}$$

Notez que le terme d'atténuation n'est pas invariant par renversement du temps  $t \leftrightarrow -t$ !

En négligeant l'atténuation, la vitesse de propagation est

$$V_S^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S .$$

## II. Ondes élastiques

### II-6. Propagation de l'énergie (1/4)

Calculons le flux d'énergie  $\Phi$  traversant une surface élémentaire  $dS$  selon la direction de sa normale  $\mathbf{n}$ .

$$\Phi_j n_j dS = \mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}} dS = -T_{ij} \dot{u}_i n_j dS$$

(c'est  $\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ ) car si l'onde se propage dans la direction de  $\mathbf{n}$  la contrainte est exercée par le milieu situé du côté de  $-\mathbf{n}$ )

Donc

$$\Phi_j = -T_{ij} \dot{u}_i$$

- Cas d'une onde longitudinale  $\mathbf{u} = \mathbf{n}u \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V_L} \right)$

On montre que (Tableau)

$$\Phi_j = \rho V_L \dot{u}^2 n_j, \quad \Phi = \rho V_L \dot{u}^2 \mathbf{n}, \quad (\text{Onde longitudinale})$$

Le flux d'énergie est orienté selon la direction de propagation de l'onde.

## II. Ondes élastiques

### II-6. Propagation de l'énergie (2/4)

- Cas d'une onde transverse  $\mathbf{u} = \mathbf{p}u \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{V_T} \right)$  où  $|\mathbf{p}| = 1$  et  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

On montre que (Tableau)

$$\boxed{\Phi_j = \rho V_T \dot{u}^2 n_j, \quad \Phi = \rho V_T \dot{u}^2 \mathbf{n},} \quad (\text{Onde transverse})$$

Le flux d'énergie est orienté selon la direction de propagation de l'onde.

L'identité entre direction de propagation de l'onde  
et direction du flux d'énergie  
est une propriété des seuls milieux isotropes !

## II. Ondes élastiques

### II-6. Propagation de l'énergie (3/4)

- Densité d'énergie de déformation

$$W = \frac{1}{2} T_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2,$$

pour les ondes longitudinales et pour les ondes transverses. (Tableau)

- Densité d'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2$

- Densité d'énergie totale  $\mathcal{E} = \rho \dot{u}^2$

- Vitesse de transport de l'énergie

$$\mathbf{U} \equiv \frac{\Phi}{\mathcal{E}} = \begin{cases} V_L \mathbf{n} & \text{(ondes longitudinales)} \\ V_T \mathbf{n} & \text{(ondes transverses)} \end{cases}$$

## II. Ondes élastiques

### II-6. Propagation de l'énergie (4/4)

L'identité entre direction de propagation de l'onde  
et direction de propagation de l'énergie  
est une propriété des seuls milieux isotropes !

Loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_j} = 0$$

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (1/11)

Partons des équations de Navier sous la forme

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})$$

Prenons la divergence de cette équation. On trouve

$$\ddot{S} - V_L^2 \Delta S = 0$$

où  $S \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}$  est la **dilatation**.

Prenons le rotationnel de l'équation de Navier. On trouve

$$\ddot{\omega} - V_T^2 \Delta \omega = 0$$

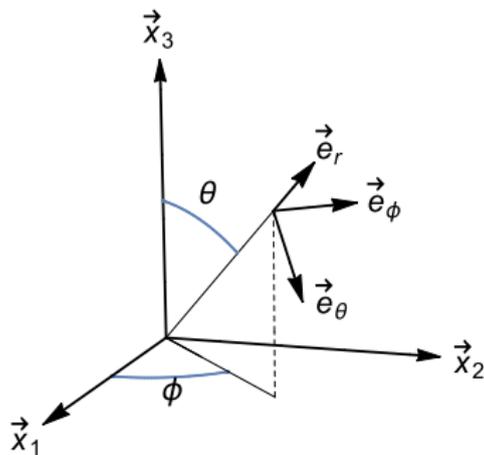
où  $\omega \equiv \nabla \wedge \mathbf{u}$  est le **vecteur tourbillon**.

Cette façon de décrire les ondes longitudinales ( $S \neq 0$ ) et les ondes transverses ( $\omega \neq \mathbf{0}$ ) va se révéler pratique pour l'étude des ondes sphériques.

# II. Ondes élastiques

## II-7. Ondes sphériques (2/11)

- Coordonnées sphériques



$$\mathbf{d} = d_1 \hat{x}_1 + d_2 \hat{x}_2 + d_3 \hat{x}_3 = d_r \mathbf{e}_r + d_\theta \mathbf{e}_\theta + d_\phi \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{cases} d_r &= (d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi) \sin \theta + d_3 \cos \theta \\ d_\theta &= (d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi) \cos \theta - d_3 \sin \theta \\ d_\phi &= -d_1 \sin \phi + d_2 \cos \phi \end{cases}$$

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (3/11)

- Ondes sphériques de dilatation/compression (1/3)

Pour des ondes de dilatation/compression à symétrie sphérique, la dilatation  $S$  est seulement fonction du temps  $t$  et du rayon  $r \equiv |\mathbf{x}|$ . Elle obéit donc à l'équation

$$\frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2(Sr)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(Sr)}{\partial r^2}$$

qui admet comme solution générale

$$S = \frac{f(t - r/V_L)}{r} + \frac{g(t + r/V_L)}{r},$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions quelconques deux fois dérivables. La fonction  $f$  (resp.  $g$ ) représente une **onde divergente** (resp. une **onde convergente**)

Nous nous limitons désormais aux seules ondes divergentes.

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (4/11)

- Ondes sphériques de dilatation/compression (2/3)

Les équations de Navier peuvent se mettre sous la forme

$$\ddot{\mathbf{u}} = V_L^2 \nabla S - V_T^2 \nabla \wedge \omega$$

On en déduit

$$\ddot{\mathbf{u}} = V_L^2 \nabla \left[ \frac{f(t - r/V_L)}{r} \right]$$

soit

$$\mathbf{u} = \nabla \left[ \frac{\phi(t - r/V_L)}{r} \right] \quad \text{où} \quad \ddot{\phi}(t) = V_L^2 f(t)$$

Cette onde est **irrotationnelle**, divergente dans la direction **radiale** et le déplacement est lui aussi **radial**. C'est donc une onde **longitudinale**

$$\mathbf{u} = u \hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{x}} \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad u = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\phi(t - r/V_L)}{r} \right]$$

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (5/11)

- Ondes sphériques de dilatation/compression (3/3)

Il y a bien sûr une singularité en  $r = 0$ . On peut l'éviter en supposant que l'onde est émise par une traction exercée sur une surface sphérique interne  $r = R > 0$ .

La traction correspondante est (Tableau)

$$t_i(-\hat{x}, \mathbf{x}, t)|_{r=R} = -T_{ij}\hat{x}_j|_{r=R} = -\hat{x}_i \left[ (3\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + (\lambda + 2\mu)r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) \right]_{r=R}$$

(traction radiale puisque  $\hat{x}_i = \delta_{ri}$ )

Le flux d'énergie est lui aussi partout radial :

$$\Phi_j = -T_{ij}\hat{x}_i\dot{u} = -\hat{x}_i \left[ (3\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + (\lambda + 2\mu)r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) \right]$$

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (6/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (1/6)

On **cherche** des ondes de cisaillement ne dépendant que de la coordonnée radiale  $r$ .

On veut  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , on pose donc

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \mathbf{F}.$$

Les équations de Navier imposent (Tableau)

$$\ddot{\mathbf{u}} = -V_T^2 \nabla \wedge \omega \implies \nabla \wedge [\ddot{\mathbf{F}} - V_T^2 \Delta \mathbf{F}] = \mathbf{0}$$

On pose alors  $\mathbf{F} = F \mathbf{d}$  où  $\mathbf{d}$  est un **vecteur unitaire constant**.

On en déduit (Tableau)

$$\ddot{F} - V_T^2 \Delta F = 0.$$

[NB On utilise  $\nabla \wedge (U \mathbf{A}) = (\nabla U) \wedge \mathbf{A} + U(\nabla \wedge \mathbf{A})$ ]

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (7/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (2/6)

Cette fonction scalaire  $F$  peut donc être purement radiale, et s'écrit alors

$$F(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{V_T}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{V_T}\right),$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions quelconques,  $f$  représentant une **onde divergente** et  $g$  une **onde convergente**.

Si on se limite à l'onde divergente, le déplacement élastique est

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{V_T}\right) \right] \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{d}$$

On a bien construit une **onde de cisaillement**, se propageant selon la direction radiale  $\mathbf{e}_r$ , de **polarisation orthogonale à sa direction de propagation**, et à **symétrie sphérique**.

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (8/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (3/6)

Comme précédemment, pour éliminer la singularité en  $r = 0$ , on va supposer que l'onde est émise par une cavité de rayon  $r = R$  sur laquelle on applique une certaine distribution de contrainte. On cherche donc à calculer

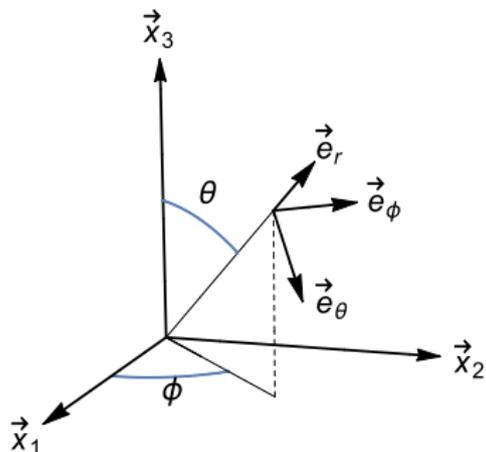
$$t_i(-\hat{x}, \mathbf{x}, t)|_{r=R} = -T_{ij}\hat{x}_j|_{r=R}$$

Il y a une complication technique : en effet la base des coordonnées sphériques ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ) est une **base locale** et, une fois exprimées dans cette base, les coordonnées du vecteur unitaire constant  $\mathbf{d}$  dépendent des angles  $\theta$  et  $\phi$  !

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (9/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (4/6)



$$\begin{cases} d_r &= (d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi) \sin \theta + d_3 \cos \theta \\ d_\theta &= (d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi) \cos \theta - d_3 \sin \theta \\ d_\phi &= -d_1 \sin \phi + d_2 \cos \phi \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d_\phi \\ d_\theta \end{pmatrix}$$

soit enfin

$$\mathbf{u} = u(t - r/V_T) \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 \sin \phi - d_2 \cos \phi \\ (d_1 \cos \phi + d_2 \sin \phi) \cos \theta - d_3 \sin \theta \end{pmatrix}$$

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (10/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (5/6)

On peut alors calculer le tenseur des déformations ([Tableau](#))

- $S_{rr} = 0$ , (évident)
- $S_{\theta\theta} = 0$ , (car  $u_\theta$  ne dépend pas de  $\theta$ )
- $S_{\phi\phi} = 0$ ,

ce qui est conforme à une onde de cisaillement pour laquelle  $S = 0$ .

Les autres composantes sont ([Tableau](#))

- $2S_{r\theta} = -\left(\dot{u} - \frac{u}{r}\right) d_\phi$ ,
- $2S_{\theta\phi} = 0$ ,
- $2S_{r\phi} = \left(\dot{u} - \frac{u}{r}\right) d_\theta$ ,

## II. Ondes élastiques

### II-7. Ondes sphériques (11/11)

- Ondes sphériques de cisaillement (6/6)

La distribution de contraintes est donc (Tableau)

$$t_i(-\hat{x}, \mathbf{x}, t)|_{r=R} = -\mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) \right]_{r=R} (\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{d})_i$$

Le flux d'énergie est (Tableau)

$$\Phi = -\mu \dot{u} r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) \sin^2 \theta \mathbf{e}_r,$$

où pour aboutir à cette expression simple on a choisi (sans perte de généralité!) le vecteur  $\mathbf{d}$  porté par l'axe  $Ox_3$ .

Notez que l'argument de  $u$  est  $t - r/V_T$ , donc l'énergie se propage bien dans le sens des  $r$  croissants (onde divergente)

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## Plan du Chapitre III

- 1 Conditions aux limites à une interface
- 2 Reflexion d'une onde plane à une surface libre
- 3 Reflexion/Transmission d'une onde plane à une interface Liquide/Solide
- 4 Mesure de constantes élastiques par immersion

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-1. Conditions aux limites (1/2)

- Interface entre deux solides (rigidement liés) :
  - Le déplacement élastique est continu à l'interface :

$$u_i|_{solide1} = u_i|_{solide2}$$

- La contrainte élastique est continue à l'interface :

$$T_{ij}n_j|_{solide1} = T_{ij}n_j|_{solide2}$$

- Surface libre d'un solide : Aucune contrainte n'est exercée à l'interface

$$t_i = T_{ij}n_j = 0 \quad (\text{à une interface libre})$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-1. Conditions aux limites (2/2)

- Interface entre un solide et un liquide non visqueux :
  - La composante normale du déplacement est continue :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}|_{\text{solide}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\text{liquide}}$$

- La contrainte tangentielle est nulle :

$$t_i \tau_i = T_{ij} n_j \tau_i = 0$$

- La contrainte normale est continue :

$$t_i n_i = T_{ij} n_j n_i = -p$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (1/12)

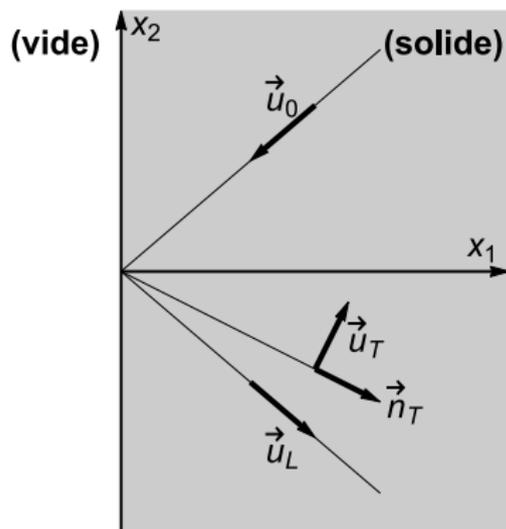
- Onde incidente longitudinale (1/9)

Onde plane, monochromatique ( $\omega$ ),  
longitudinale

Prenons  $x_1Ox_2$  comme plan d'incidence.

- $Ox_1$  est orthogonal à l'interface
- $Ox_2$  est orthogonal à  $Ox_1$  dans le plan contenant  $\mathbf{n}_0$ .
- $Ox_3$  est alors choisi de façon à avoir un trièdre direct.

Deux ondes réfléchies (À démontrer !)



# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (2/12)

- Onde incidente longitudinale (2/9)

Onde incidente : Amplitude  $A_0$ , polarisation  $\mathbf{n}_0$ , angle d'incidence  $\theta_0$

$$\mathbf{u}_0 = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_0 \equiv \frac{\omega}{V_L} \mathbf{n}_0$$

Onde réfléchie longitudinale : Amplitude  $A_L$ , polarisation  $\mathbf{n}_L$ , angle de réflexion  $\theta_L$

$$\mathbf{u}_L = A_L \mathbf{n}_L e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_L \equiv \frac{\omega}{V_L} \mathbf{n}_L$$

Onde réfléchie transverse d'amplitude  $A_T$ , polarisation  $\mathbf{u}_T$ , direction de propagation  $\mathbf{n}_T$ , angle de réflexion  $\theta_T$ .

$$\mathbf{u}_T = A_T (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{n}_T) e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_T \equiv \frac{\omega}{V_T} \mathbf{n}_T$$

Déplacement total (en enlevant le facteur  $e^{i\omega t}$ )

$$\mathbf{u} = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} + A_L \mathbf{n}_L e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}} + A_T (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{n}_T) e^{i\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x}}$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (3/12)

- Onde incidente longitudinale (3/9)

La condition à la limite est vraie  $\forall x_2$ ,  $\forall x_3$  et  $\forall t$ . Par conséquent  $\omega$ ,  $k_3$  et  $k_2$  doivent être les mêmes pour les trois ondes. On en déduit les :

Lois de Snell-Descartes (Tableau)

Les directions de propagation des trois ondes sont coplanaires,  
dans le plan d'incidence

$$\theta_L = \theta_0, \quad \sin \theta_T = \frac{V_T}{V_L} \sin \theta_L$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (4/12)

- Onde incidente longitudinale (4/9) : Amplitude des ondes réfléchies

Le déplacement total doit vérifier la condition à la limite

$$T_{i1} = 0 \quad \text{en} \quad x_1 = 0$$

avec

$$T_{ij} = 2\rho V_T^2 S_{ij} + \rho (V_L^2 - 2V_T^2) S_{ll} \delta_{ij}$$

On en déduit (Tableau)

$$\begin{cases} V_T \sin 2\theta_0 A_L - V_L \cos 2\theta_T A_T = V_T \sin 2\theta_0 A_0 \\ V_L \cos 2\theta_T A_L + V_T \sin 2\theta_T A_T = -V_L \cos 2\theta_T A_0 \end{cases}$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (5/12)

- Onde incidente longitudinale (5/9) : Amplitude des ondes réfléchies

Coefficients de réflexion en amplitude (Tableau)

$$\frac{A_L}{A_0} = \frac{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_T - \cos^2 2\theta_T}{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_T + \cos^2 2\theta_T}, \quad \frac{A_T}{A_0} = \frac{2K \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_T}{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_T + \cos^2 2\theta_T}$$

où

$$K \equiv \frac{V_T}{V_L} = \left[ \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right]^{1/2}, \quad \sin \theta_T = K \sin \theta_0$$

Une onde incidente longitudinale sous incidence oblique  
crée une onde transverse !

On trouve bien  $A_L/A_0 = -1$  et  $A_T/A_0 = 0$  pour  $\theta_0 = 0$

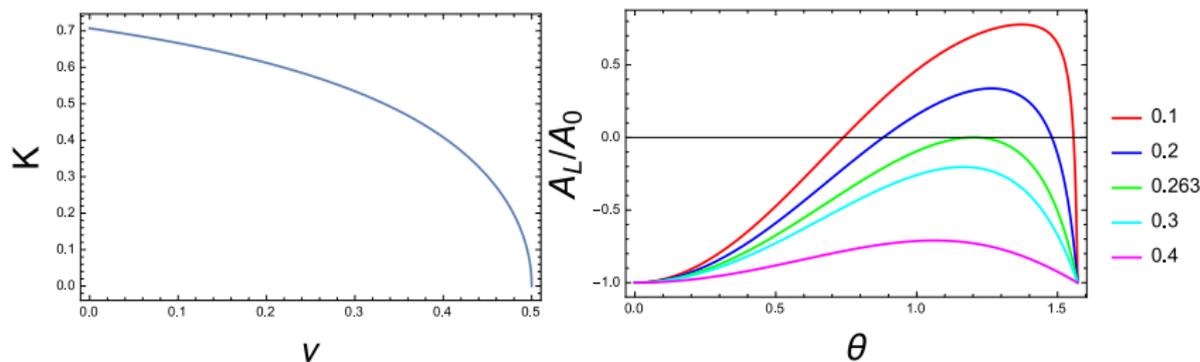
On a vu  $K < 1/\sqrt{2}$  donc  $A_T/A_0 \geq 0$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (6/12)

- Onde incidente longitudinale (6/9) :  $A_L/A_0$

En revanche, le coefficient de réflexion  $A_L/A_0$  peut s'annuler



Lorsque  $\nu < 0.263$  il y a deux angles d'incidence pour lesquels  $A_L/A_0 = 0$ . Si on se place exactement à ces angles, on transforme une onde longitudinale, par réflexion, en une onde transverse.

(Utilisé dans la pratique)

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (7/12)

- Onde incidente longitudinale (7/9) :  $A_L/A_0$

On pose  $z = K^2 \sin^2 \theta_0$ , soit  $z \in [0, K^2]$ .

$A_L = 0$  si  $f(z) = 4z\sqrt{K^2 - z}\sqrt{1 - z} - 1 + 4z(1 - z) = 0$

soit si  $p(z) \equiv -1 + 8z + 8(2K^2 - 3)z^2 - 16(K^2 - 1)z^3 = 0$ .

$p(0) = -1$  et  $p(K^2) = -(1 - 2K^2)^4 < 0$ , donc on cherche un maximum local de  $p(z)$ , et s'il peut s'annuler

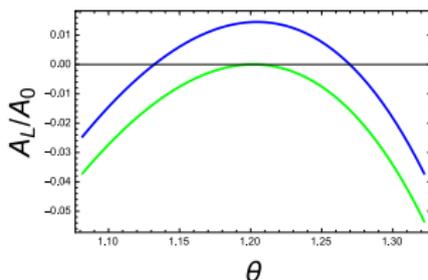
$p'(z)$  est un polynôme de degré 2, de racines  $z_1(K)$  et  $z_2(K)$ .

On trouve numériquement la racine  $K^*$  de  $p[Z_2(K^*)] = 0$

$A_L(K^*, \theta_0^*) = 0$  avec  $\theta_0^* = \arcsin \left[ \sqrt{z_2(K^*)/K^*} \right]$ .

Pour  $\nu < \nu^* = (1 - 2K^{*2})/[2(1 - K^{*2})] \approx 0.263$ ,

$A_L(K, \theta_0)$  a deux racines.



# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (8/12)

- Onde incidente longitudinale (8/9) : Conservation de l'énergie.

Soit  $\mathbf{u}_0 = A_0 \mathbf{n}_0 \cos \omega(t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}/V_L)$ . Le flux d'énergie incident est

$$\Phi_0 = \rho V_L \omega^2 A_0^2 \cos^2 \omega(t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}/V_L) \mathbf{n}_0$$

Le flux d'énergie incident moyenné dans le temps est donc

$$\langle \Phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \rho V_L \omega^2 A_0^2 \mathbf{n}_0,$$

et le flux d'énergie incident traversant la paroi est

$$\langle \Phi_0 \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_L \omega^2 A_0^2 \cos \theta_0$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (9/12)

- Onde incidente longitudinale (9/9) : Conservation de l'énergie.

De même le flux d'énergie de l'onde réfléchie longitudinale traversant la paroi est

$$\langle \Phi_L \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_L \omega^2 A_L^2 \cos \theta_0,$$

car  $\theta_L = \theta_0$ , et le flux d'énergie de l'onde réfléchie transverse traversant la paroi est

$$\langle \Phi_T \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_T \omega^2 A_T^2 \cos \theta_T.$$

On en déduit les coefficients de réflexion en énergie,

$$R_L = \left( \frac{A_L}{A_0} \right)^2, \quad R_T = \frac{V_T \cos \theta_T}{V_L \cos \theta_0} \left( \frac{A_T}{A_0} \right)^2$$

La conservation de l'énergie se traduit par (Tableau)

$$R_L + R_T = 1$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (10/12)

- Onde incidente transverse (1/3)

Il faut supposer l'onde incidente transverse polarisée dans le plan d'incidence (sinon elle est trivialement totalement réfléchiée en une onde transverse!) [À faire en exercice!]

Loi de Snell-Descartes

$$\theta_T = \theta_0, \quad \sin \theta_L = \frac{V_L}{V_T} \sin \theta_0$$

Coefficients de réflexion en amplitude

$$\frac{A_T}{A_0} = \frac{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_L - \cos^2 2\theta_0}{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_L + \cos^2 2\theta_0}, \quad \frac{A_L}{A_0} = \frac{-K \sin 4\theta_0}{K^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_L + \cos^2 2\theta_0}$$

où

$$K \equiv \frac{V_T}{V_L} = \left[ \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \right]^{1/2}, \quad \sin \theta_L = \frac{1}{K} \sin \theta_0$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (11/12)

- Onde incidente transverse (2/3)

Pour  $\theta_0 = 0$ , on trouve comme attendu  $A_L/A_0 = 0$  et  $A_T/A_0 = -1$ .

Lorsque l'angle d'incidence augmente,  $\theta_L$  atteint l'angle  $\pi/2$  pour un angle critique  $\theta_C$  dont la valeur est toujours inférieure à  $\pi/4$  :

$$\sin \theta_C = K = \frac{V_T}{V_L} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les flux d'énergie traversant la paroi sont

$$\langle \Phi_0 \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_T \omega^2 A_0^2 \cos \theta_0,$$

$$\langle \Phi_T \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_T \omega^2 A_T^2 \cos \theta_0,$$

$$\langle \Phi_L \rangle \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{2} \rho V_L \omega^2 A_0^2 \cos \theta_L$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-2. Reflexion d'une onde plane à une surface libre (12/12)

- Onde incidente transverse (3/3)

On en déduit les coefficients de réflexion en énergie,

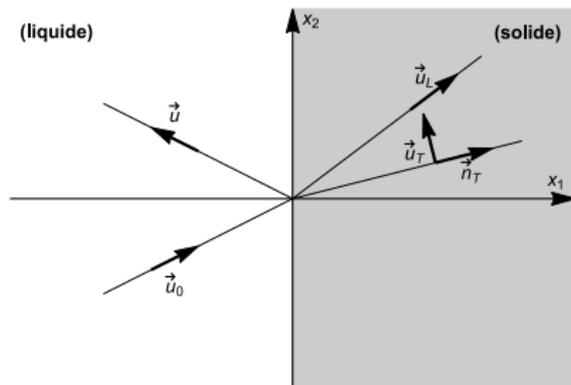
$$R_L = \frac{V_L \cos \theta_L}{V_T \cos \theta_0} \left( \frac{A_L}{A_0} \right)^2, \quad R_T = \left( \frac{A_T}{A_0} \right)^2$$

La conservation de l'énergie se traduit par

$$R_L + R_T = 1$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (1/7)



Onde acoustique plane, monochromatique ( $\omega$ )

Plan d'incidence  $x_1 O x_2$ .

- $Ox_1$  est orthogonal à l'interface
- $Ox_2$  est orthogonal à  $Ox_1$  dans le plan contenant  $\mathbf{n}_0$ .
- $Ox_3$  est alors choisi de façon à avoir un trièdre direct.

Une onde acoustique réfléchie, deux ondes élastiques transmises

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (2/7)

Onde sonore incidente : Amplitude  $A_0$ , direction  $\mathbf{n}_0$ , angle d'incidence  $\theta_0$

$$\mathbf{u}_0 = A_0 \mathbf{n}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_0 \equiv \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_0$$

Onde sonore réfléchi : Amplitude  $A$ , direction  $\mathbf{n}$ , angle de réflexion  $\theta$

$$\mathbf{u} = A \mathbf{n} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k} \equiv \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$$

Onde longitudinale : Amplitude  $A_L$ , polarisation  $\mathbf{n}_L$ , angle  $\theta_L$

$$\mathbf{u}_L = A_L \mathbf{n}_L e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_L \equiv \frac{\omega}{V_L} \mathbf{n}_L$$

Onde transverse : Amplitude  $A_T$ , polarisation  $\mathbf{u}_T$ , direction de propagation  $\mathbf{n}_T$ , angle  $\theta_T$ .

$$\mathbf{u}_T = A_T (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{n}_T) e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \mathbf{k}_T \equiv \frac{\omega}{V_T} \mathbf{n}_T$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (3/7)

Les ondes sonores sont longitudinales, de vitesse de propagation  $c$ . Par le même raisonnement qu'avant, on obtient les :

### Lois de Snell-Descartes

Les directions de propagation des ondes sont coplanaires, dans le plan d'incidence

$$\theta = \theta_0, \quad \frac{1}{V_T} \sin \theta_T = \frac{1}{V_L} \sin \theta_L = \frac{1}{c} \sin \theta_0$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (4/7)

- Continuité du déplacement normal (Tableau)

$$(A_0 - A) \cos \theta_0 = A_L \cos \theta_L - A_T \sin \theta_T$$

- Continuité de la contrainte normale (Tableau)

$$(A_0 + A) Z = Z_L A_L \cos 2\theta_T - Z_T A_T \sin 2\theta_T$$

où  $Z \equiv \rho c$ ,  $Z_L \equiv \rho_S V_L$  et  $Z_T \equiv \rho_S V_T$  sont les **impédances acoustiques**.

- Nullité de la contrainte tangentielle (Tableau)

$$Z_T A_L \sin 2\theta_L + Z_L A_T \cos 2\theta_T = 0$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (5/7)

- Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

$$A_L = -A_T \frac{Z_L}{Z_T} \frac{\cos 2\theta_T}{\sin 2\theta_L}$$

$$A_0 - A = -A_T \frac{1}{2 \cos \theta_0 \sin \theta_T} \quad (\text{Tableau})$$

$$A_0 + A = -A_T \frac{1}{2 \cos \theta_L \sin \theta_T} \frac{Z_L}{Z} N$$

où on pose

$$N \equiv \cos^2 2\theta_T + K^2 \sin 2\theta_T \sin 2\theta_L, \quad R = \frac{Z \cos \theta_L}{Z_L \cos \theta_0}, \quad K \equiv \frac{V_T}{V_L} = \frac{Z_T}{Z_L}$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{N - R}{N + R}, \quad \frac{A_T}{A_0} = -\frac{2ZZ_T \sin 2\theta_L}{Z_L^2} \frac{1}{N + R}, \quad \frac{A_L}{A_0} = \frac{2Z \cos 2\theta_T}{Z_L} \frac{1}{N + R}$$

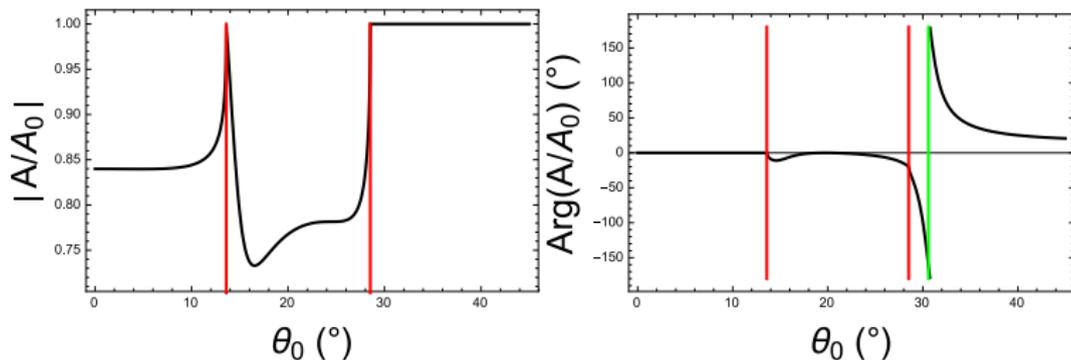
# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (6/7)

- Exemple : interface eau/duralumin ( $c = 1480$  m/s,  $V_T = 3100$  m/s,  $V_L = 6300$  m/s,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_S = 2.7 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>)
  - Premier angle critique  $\theta_0^L = \arcsin(c/V_L) \approx 13.6^\circ$ .  
Alors  $\theta_L = \pi/2$ , donc  $R = 0$ , soit  $A/A_0 = 1$  et  $A_T/A_0 = 0$ .  
Pour  $\theta_0 > \theta_0^L$  l'onde longitudinale est évanescence et  $R$  imaginaire pur.
  - Deuxième angle critique  $\theta_0^T = \arcsin(c/V_T) \approx 28.5^\circ$ .  
Alors  $\theta_T = \pi/2$ , soit  $N = 1$ . Alors  $A/A_0 = (1 - i|R|)/(1 + i|R|)$  est de module 1, ce qui correspond à une réflexion totale.  
Pour  $\theta_0 > \theta_0^L$  l'onde transverse est évanescence.
  - L'angle  $\theta_0$  tel que  $\theta_T = \pi/4$  est utilisé en pratique, en contrôle non destructif. Il vaut  $\theta_0 = \arcsin[c/(\sqrt{2}V_T)] \approx 19.7^\circ$ .

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-3. Reflexion/Transmission à une interface Liquide/Solide (7/7)



- En **rouge** les deux angles critiques  $\theta_0^L$  et  $\theta_0^T$
- En **vert** le lieu d'une singularité de la phase de  $A/A_0$ , distincte de  $\theta_0^T$ . Cette singularité est liée à l'apparition d'une **onde de Rayleigh** à l'interface. Il s'agit d'une onde **localisée** à l'interface (elle décroît exponentiellement avec la profondeur, dans le solide) très analogue aux ondes à la surface libre d'un fluide.

(Pour plus de détails voir Royer & Dieulesaint)

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (1/9)

Principe de la mesure : Le matériau solide est immergé au sein d'un liquide, l'émission et la réception se faisant à l'aide d'hydrophones.

[1] S. Siva Shashidhara Reddy, K. Balasubramaniam, C.V. Krishnamurthy, M. Shankar, *Ultrasonic goniometry immersion techniques for the measurement of elastic moduli*, Composite Structures **67**, 3–17 (2005)

[2] B. Castagnede, J. Roux, B. Hosten, *Correlation method for normal mode tracking in anisotropic media using an ultrasonic immersion system*, Ultrasonics **27**, 280 (1989)

- Dispositif en transmission (d'après [1])

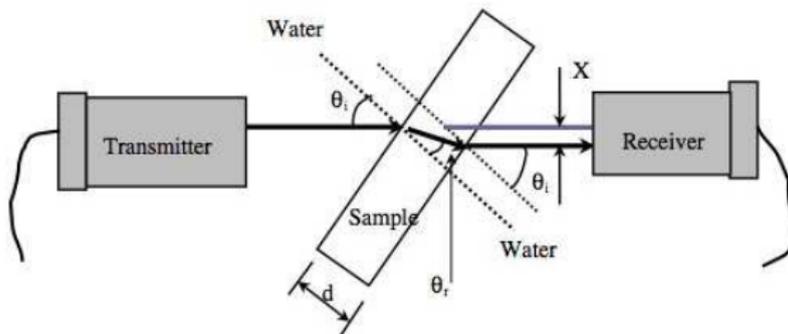


Fig. 2. Schematic of through-transmission immersion technique.

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (2/9)

- Dispositif en réflexion (d'après [1])

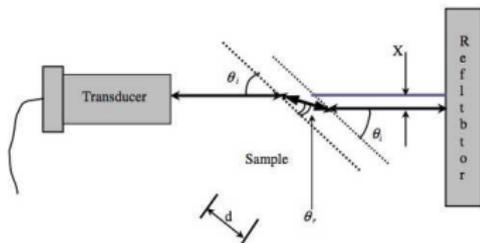


Fig. 5. Schematic of back-reflection technique.



Fig. 4. Setup for back-reflection immersion technique.

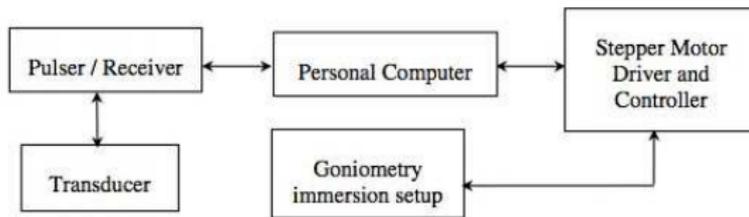


Fig. 3. Block diagram of data acquisition system.

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (3/9)

- Méthode de mesure (d'après [2])
  - On enregistre un **signal de référence**  $R(t)$ , sans l'échantillon
  - On enregistre le signal reçu avec l'échantillon,  $S(t)$
  - **Hypothèse** : les deux signaux ont **même forme** et sont juste décalés d'un écart temporel  $\Delta t$
  - **Réaliste uniquement dans un milieu non dispersif!**
  - On calcule la **fonction d'autocorrélation** entre  $R(t)$  et  $S(t)$

$$C_{RS}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)S(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)R[t - (\tau + \Delta t)]dt$$

- $C_{RS}(\tau)$  admet alors un **maximum pour  $\tau = -\Delta t$**  ce qui permet de mesurer  $\Delta t$ .

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (4/9)

- Mise en oeuvre de la mesure (d'après [2])

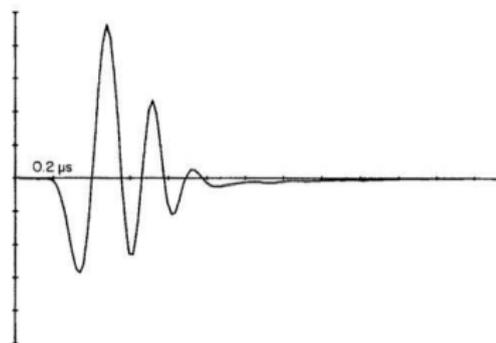


Figure 3 Reference signal for a 5 MHz central frequency transducer

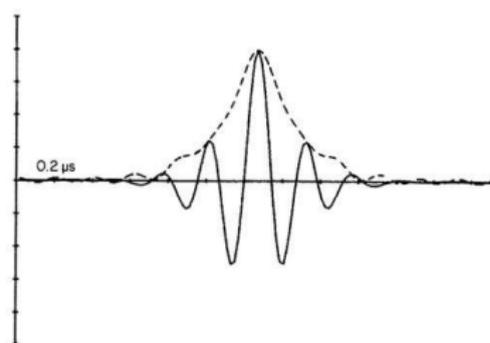


Figure 4 Autocorrelation function for the signal of Fig. 3

- Il suffit que la dispersion soit faible autour de la fréquence centrale du transducteur
- La précision peut aller jusqu'à 1/100 de la période d'échantillonnage (en soignant la méthode numérique, voir [2])

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (5/9)

- Position du récepteur (d'après [2])  
[A retrouver en exercice!]

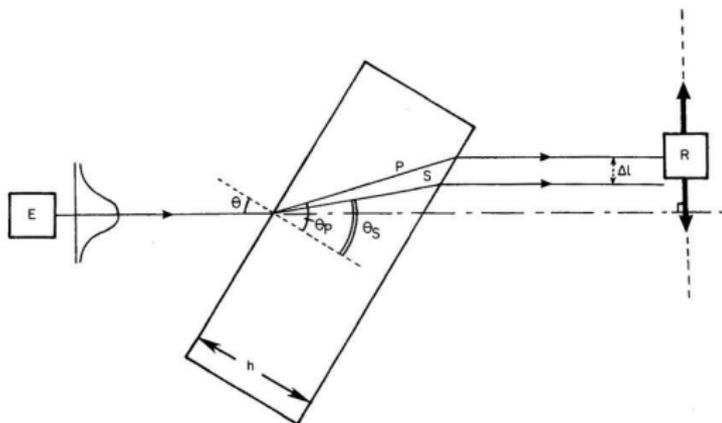


Figure 2 Spatial shift of the quasi-waves during transmission through a plate

$$\Delta l = \left[ \frac{\cos \theta}{c} \left( \frac{V_L}{\cos \theta_L} - \frac{V_T}{\cos \theta_T} \right) \right] h \sin \theta$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (6/9)

- Mesures de vitesse (d'après [1])

[A retrouver en exercice!]

- Technique de réflexion arrière (*back-reflection*)

$$V_{\phi} = \left[ \left( \frac{\Delta t}{2d} \right)^2 - \frac{\Delta t/d}{c} \cos \theta_i + \left( \frac{1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

[ $V_{\phi}$  vitesse de phase,  $d$  épaisseur de l'échantillon,  $\theta_i$  angle d'incidence,  $\Delta t = t_2 - t_1$  écart de temps entre le signal reçu avec ( $t_2$ ) et sans ( $t_1$ ) l'échantillon.]

- Technique en transmission

$$V_{\phi} = \left[ \left( \frac{\Delta t}{d} \right)^2 - \frac{2\Delta t/d}{c} \cos \theta_i + \left( \frac{1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (7/9)

- Mise en pratique de la **méthode d'autocorrélation** (d'après [1])

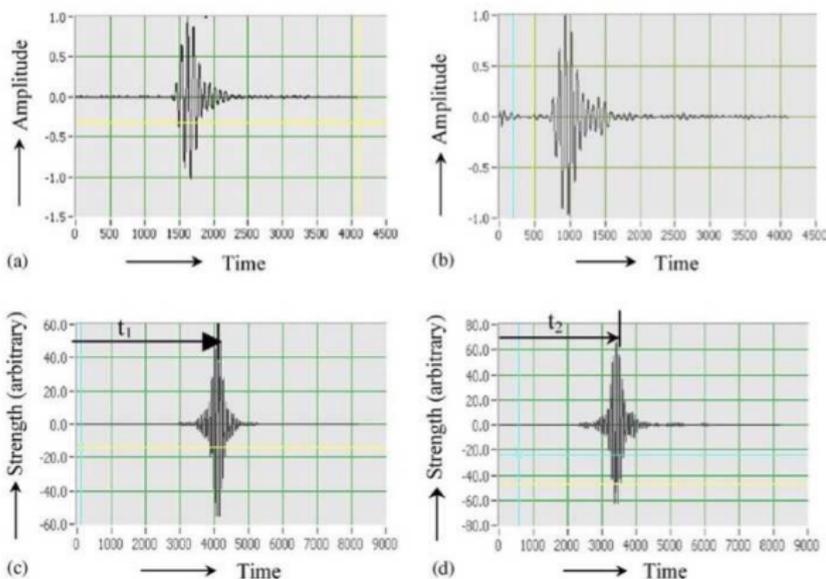


Fig. 6. Cross-correlation technique used for the computation of wave velocity, time of flight  $= t_2 - t_1$  or  $t_1 - t_2$ . (a) Normalized reference signal (without sample). (b) Normalized signal with sample. (c) Auto correlation of reference signal serves to define the time origin. (d) Cross-correlation of sample signal with reference signal defines the time shift w.r.t. the time origin.

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (8/9)

- Mesures de vitesses de propagation (d'après [1])

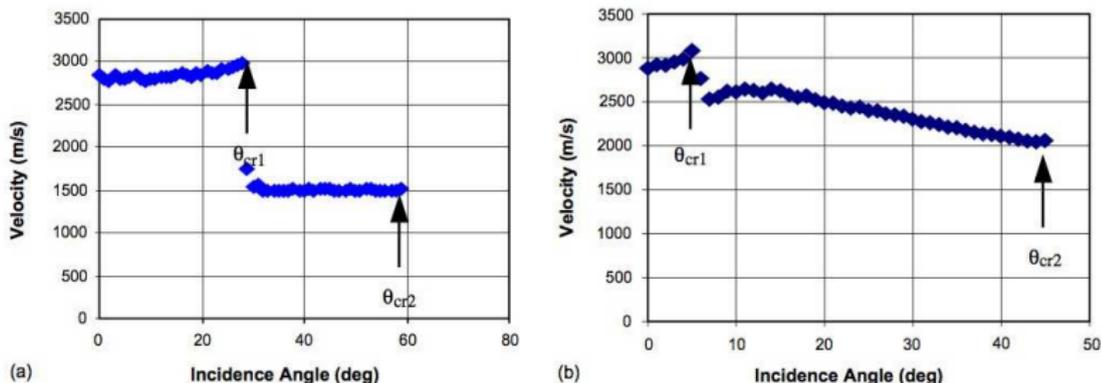


Fig. 7. Velocity vs. incident angle plots for 2.16 mm thick unidirectional graphite-epoxy composite with data taken using back-reflection technique. (a) For wave propagating in 1-2 plane (isotropic plane). (b) For wave propagating in 1-3 plane (anisotropic plane).

Remarque : Mesures dans des matériaux anisotropes !

# III. Reflexion/Transmission à une interface plane

## III-4. Mesure de constantes élastiques par immersion (9/9)

- Bilan général (d'après [1])
  - Mesure **nondestructive**
  - Mesure goniométrique, donc accès à plusieurs constantes élastiques
  - Extension possible aux matériaux **orthorombiques** (*orthotropic*) (9 constantes élastiques)
  - Méthode automatisable
  - Mesure **locale** des constantes élastiques (résolution la taille du faisceau acoustique)

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## Plan du Chapitre IV

- 1 Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées.
- 2 Source ponctuelle
- 3 Fonction de Green
- 4 Source sinusoïdale en temps
- 5 Oscillations d'une sphère élastique homogène

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-1. Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées (1/5)

- Distribution de Dirac

- Définition « naïve » de  $\delta(x)$  :

- $\delta(x) = 0$  pour  $x < 0$  et pour  $x > 0$ .

- $\delta(x)$  est infinie en  $x = 0$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

- Définition plus formelle :  $\forall f(x)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (dite *fonction d'essai*),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

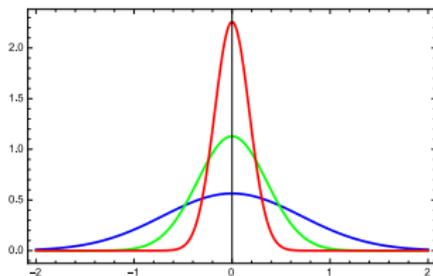
- $\delta(x)$  peut être construite comme la limite d'une suite de fonctions,

$$\delta(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2\right]$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-1. Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées (2/5)

- Propriétés de la distribution de Dirac

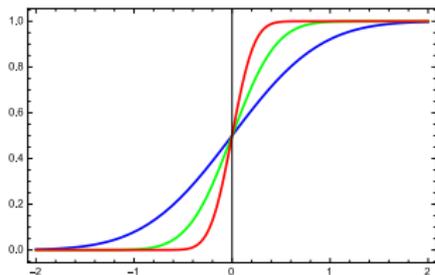


- Si  $x$  est une longueur,  $[x] = L$  et  $[\delta(x)] = L^{-1}$ .
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$$
- Si  $a \neq 0$ ,  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$
- Si  $\phi(x)$  a un seul zéro en  $x_0$ ,  $\delta[\phi(x)] = \frac{1}{|\phi'(x_0)|} \delta(x - x_0)$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-1. Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées (3/5)

- Distribution de Heaviside  $H(x)$  ou distribution échelon

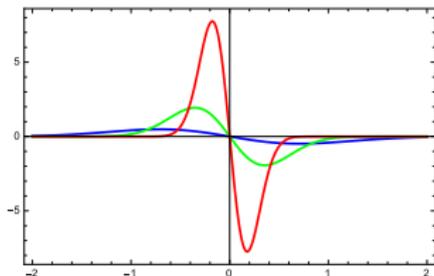


- $H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(u) du$
- $H(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $H(x) = 1$  pour  $x > 0$
- $H'(x) = \delta(x)$ .

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-1. Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées (4/5)

- Dérivée de la distribution de Dirac



- $\delta'(x)$  se construit comme la limite d'une suite de fonctions,

$$\delta'(x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\epsilon} \right)^2 \right] \right\}$$

- Son action sur la fonction  $f(x)$  se calcule en intégrant par partie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - a) dx = -f'(a)$$

- Elle peut aussi être définie par  $\delta'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(x + \epsilon) - \delta(x - \epsilon)}{2\epsilon}$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-1. Rappels. Distribution de Dirac et distributions associées (5/5)

- Généralisation à des distributions sur  $\mathbb{R}^3$ 
  - La distribution  $\delta(\mathbf{x})$  est nulle partout dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  sauf à l'origine, et son intégrale sur tout l'espace vaut 1
  - $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$
  - De même on définit  $\nabla\delta(\mathbf{x})$  selon

$$\nabla\delta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \delta'(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \\ \delta(x_1)\delta'(x_2)\delta(x_3) \\ \delta(x_1)\delta(x_2)\delta'(x_3) \end{pmatrix}$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (1/13)

- Équations de Navier en présence d'une source

Une source acoustique est une densité de force (en  $\text{N/m}^3$ )  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ .  
Les équations de Navier s'écrivent alors

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = V_L^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

Nous allons déterminer

- ◇ La source d'une onde sphérique longitudinale
- ◇ La source d'une onde sphérique transverse
- ◇ L'onde émise par une source ponctuelle

Ces sources seront **définies au sens des distributions.**

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (2/13)

- Source d'une onde sphérique longitudinale (1/4) (Tableau)

Le champ de déplacement élastique est

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\phi(t - r/V_L)}{r} \right] \hat{x}$$

Ce champ est irrotationnel. La force source cherchée vérifie donc

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - V_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$$

Le champ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  présente une singularité en  $r = 0$ , mais on vérifie facilement que  $\mathbf{F} = 0$  lorsque  $r > 0$ .

La fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  sera donc une **distribution**, avec une **singularité à l'origine**.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (3/13)

- Source d'une onde sphérique longitudinale (2/4)

Méthode de calcul :

- ◇ Il faut identifier la nature de la singularité à l'origine
- ◇ On intègre donc sur un volume  $\mathcal{V}$  entouré par surface fermée  $\partial\mathcal{V}$
- ◇ À la fin du calcul, ce volume est une sphère de rayon  $\epsilon$  et  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\mathcal{V} = \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \partial\mathcal{V} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

- ◇ On peut convertir intégrale de volume en intégrale de surface par le théorème de Green (ou de la divergence)

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

- ◇  $\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U\nabla \cdot \mathbf{A}$
- ◇  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (4/13)

- Source d'une onde sphérique longitudinale (3/4) ([Tableau](#))

Soit  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathcal{V}$  un volume entourant l'origine délimité par une surface fermée  $\partial\mathcal{V}$ . Par le théorème de Green

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_{\mathcal{V}} [\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} - V_L^2 \mathbf{u} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})] \, dV + V_L^2 \int_{\partial\mathcal{V}} [\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{u})] \cdot d\mathbf{S}$$

On prend pour  $\mathcal{V}$  la sphère de rayon  $\epsilon$  centrée sur l'origine.

On trouve, dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV = V_L^2 \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{w}) d\mathcal{S} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

On en déduit (puisque  $\mathbf{w}$  est une fonction d'essai quelconque)

$$\mathbf{F} = 4\pi V_L^2 \phi(t) \nabla \delta(\mathbf{x})$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (5/13)

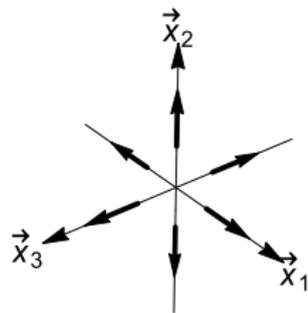
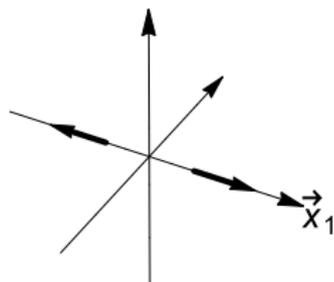
- Source d'une onde sphérique longitudinale (4/4)

La source ponctuelle

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= -\hat{x}_1 \delta'(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \\ &= -\frac{\hat{x}_1}{2\epsilon} \delta(x_1 + \epsilon) \delta(x_2) \delta(x_3) + \frac{\hat{x}_1}{2\epsilon} \delta(x_1 - \epsilon) \delta(x_2) \delta(x_3)\end{aligned}$$

est un **dipôle élémentaire** (gauche).

La source ponctuelle émettant une onde longitudinale à symétrie sphérique est une **superposition de trois dipôles élémentaires** (droite)



# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (6/13)

- Source d'une onde sphérique transverse (1/4)

Le champ de déplacement élastique est

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} f \left( t - \frac{r}{V_T} \right) \right] \hat{x} \wedge \mathbf{d}$$

où  $\mathbf{d}$  est un vecteur unitaire constant.

On a vu aussi

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \Psi, \quad \Psi = \psi \mathbf{d}, \quad \ddot{\psi} = V_T^2 \Delta \psi, \quad \psi(r, t) = \frac{1}{r} f \left( t - \frac{r}{V_T} \right).$$

Ce champ est équivolumique. La force source cherchée vérifie donc

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$$

Le champ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  présente une singularité en  $r = 0$ , mais on vérifie facilement que  $\mathbf{F} = 0$  lorsque  $r > 0$ .

La fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  sera donc une **distribution**, avec une **singularité à l'origine**.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (7/13)

- Source d'une onde sphérique transverse (2/4) (Tableau)

Soit  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathcal{V}$  un volume entourant l'origine délimité par une surface fermée  $\partial\mathcal{V}$ . Par le théorème de Green

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV = \int_{\mathcal{V}} [\ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} - V_T^2 \nabla^2 \Psi \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w})] \, dV - V_T^2 \int_{\partial\mathcal{V}} (\nabla^2 \Psi \wedge \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{S}$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV &= \int_{\mathcal{V}} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} \, dV + V_T^2 \int_{\mathcal{V}} \nabla \psi \cdot \nabla [\mathbf{d} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w})] \, dV - \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{V}} \{ \ddot{\Psi} \wedge \mathbf{w} + V_T^2 [\mathbf{d} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w})] \nabla \psi \} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

On prend pour  $\mathcal{V}$  la sphère de rayon  $\epsilon$  centrée sur l'origine et  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV = -V_T^2 \int_{\partial\mathcal{V}} [\mathbf{d} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w})] \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (8/13)

- Source d'une onde sphérique transverse (3/4) (Tableau)

Par hypothèse  $f(\cdot)$  et  $\mathbf{w}(\cdot)$  sont des fonctions régulières, donc

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, dV = 4\pi V_T^2 f(t) \mathbf{d} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w})|_{r=0}$$

Soit puisque  $\mathbf{w}$  est une fonction d'essai quelconque

$$\mathbf{F} = -4\pi V_T^2 f(t) \mathbf{d} \wedge \nabla \delta(\mathbf{x})$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

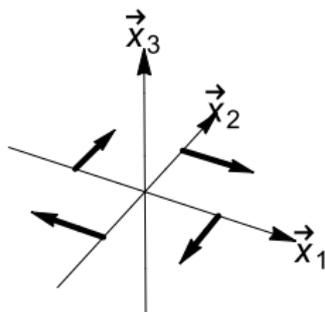
## IV-2. Source ponctuelle (9/13)

- Source d'une onde sphérique transverse (4/4)

Sans perte de généralité, on peut orienter  $\mathbf{d}$  selon  $Ox_3$ . Alors

$$\mathbf{d} \wedge \nabla \delta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\delta(x_1)\delta'(x_2)\delta(x_3) \\ \delta'(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

La source ponctuelle émettant une onde transverse à symétrie sphérique est un **couple élémentaire**



# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (10/13)

- Source ponctuelle quelconque (1/4)

On s'intéresse maintenant à l'onde émise dans un **solide infini, homogène et isotrope** par une force ponctuelle  $\mathbf{F} = \mathbf{d}f(t)\delta(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{d}$  est un vecteur unitaire constant.

Les équations de Navier sont

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - V_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

Soit  $\mathbf{A}$  un champ de vecteur nul en dehors d'un domaine fermé  $\mathcal{D}$  de l'espace. Prenons alors comme densité de force

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - V_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$$

On a pour les équations de Navier une solution évidente, dont on montre qu'elle est unique :

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} !$$

Cette solution ne comporte **aucune propagation d'onde**, puisque  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  à l'extérieur de  $\mathcal{D}$ .

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (11/13)

- Source ponctuelle quelconque (2/4)

Ces considérations semblent triviales, mais elles impliquent que :  
l'onde émise par la source  $\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2$

est équivalente à

l'onde émise par la source  $V_L^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$

Posons alors  $\mathbf{A} = \mathbf{d}\phi(t)\delta(\mathbf{x})$  et  $\ddot{\phi}(t) \equiv f(t)$ . On montre (Tableau)

$$\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 \iff \phi(t) \left[ V_L^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{d}\delta(\mathbf{x})) - V_T^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{d}\delta(\mathbf{x})) \right]$$

$$\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 \iff \underbrace{(\mathbf{d} \cdot \nabla) \left[ V_L^2 \phi(t) \nabla \delta(\mathbf{x}) \right]}_{\text{SPL}} + \underbrace{\nabla \wedge \left[ V_T^2 \phi(t) \mathbf{d} \wedge \nabla \delta(\mathbf{x}) \right]}_{\text{SPT}}$$

SPL : source ponctuelle longitudinale

SPT : source ponctuelle transverse.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (12/13)

- Source ponctuelle quelconque (3/4)

On déduit directement des calculs précédents (Tableau)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{d} \cdot \nabla) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\phi(t - r/V_L)}{r} \right] \hat{\mathbf{x}} \right\} - \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \left\{ (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{d}) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\phi(t - r/V_T)}{r} \right] \right\}$$

soit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{f(t - r/V_L)}{4\pi r V_L^2} (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{f(t - r/V_T)}{4\pi r V_T^2} \hat{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{d} \wedge \hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{4\pi r^3} \int_{r/V_L}^{r/V_T} \tau f(t - \tau) d\tau [3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}]$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-2. Source ponctuelle (13/13)

- Source ponctuelle quelconque (4/4)

Si  $f(t) = \delta(t)$ ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta(t - r/V_L)}{4\pi r V_L^2} (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{\delta(t - r/V_T)}{4\pi r V_T^2} \hat{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{d} \wedge \hat{\mathbf{x}}) + \frac{t}{4\pi r^3} \left[ H\left(t - \frac{r}{V_L}\right) - H\left(t - \frac{r}{V_T}\right) \right] [3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}]$$

De gauche à droite :

- ◇ Le premier terme est une **onde longitudinale radiale**, se propageant à  $V_L$  (mais **pas** à symétrie sphérique!)
- ◇ Le deuxième terme est une **onde transverse**, se propageant à  $V_T$
- ◇ Le troisième terme représente une composante ayant toutes les vitesses intermédiaires entre  $V_T$  et  $V_L$ . Mais il est d'ordre  $\mathcal{O}(1/r^2)$  à grande distance, si  $f(t)$  est de durée finie. C'est donc un terme **non propagatif** aussi appelé **terme de champ proche**.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-3. Fonction de Green (1/2)

Soit une force ponctuelle  $F_i = \delta_{il}\delta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})$ . Cette force agit au point  $\mathbf{x} - \mathbf{X}$ , dans la direction  $Ox_l$ , avec une variation temporelle  $\delta(t)$ .

Le champ de déplacement créé par cette force est  $u_i = G_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$   
Il s'agit de la  $i$ -ème composante du déplacement au point  $\mathbf{x}$ , dû à une force ponctuelle située au point  $\mathbf{X}$ , agissant dans la direction  $Ox_l$ , avec comme dépendance en temps  $\delta(t)$ .

Soit maintenant une distributions de force  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  dans un domaine borné  $\mathcal{D}$ . En un point  $\mathbf{X}$  quelconque, on peut écrire pour chaque composante de  $\mathbf{F}$

$$F_i(\mathbf{X}) = \int_{\mathcal{D}} F_i(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X})dV$$

La distribution de force est donc vue comme  
une superposition de forces ponctuelles.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-3. Fonction de Green (2/2)

Puisque les équations de l'élasticité sont **linéaires**, le déplacement résultant sera la **superposition** de tous les déplacements induits par chacune des forces ponctuelles :

$$u_i(\mathbf{X}, t) = \int_{\mathcal{D}} F_l(\mathbf{x}) G_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) dV$$

$G_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t)$  est appelée **fonction de Green**. Sa connaissance suffit à déterminer le champ de déplacement correspondant à une distribution de force quelconque. Elle s'écrit : (Tableau)

$$G_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{X}, t) = \frac{\hat{q}_i \hat{q}_l}{4\pi R V_L^2} \delta(t - R/V_L) + \frac{(\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l)}{4\pi R V_T^2} \delta(t - R/V_T) + \frac{(3\hat{q}_i \hat{q}_l - \delta_{il})}{4\pi R^3} t \left[ H\left(t - \frac{R}{V_L}\right) - H\left(t - \frac{R}{V_T}\right) \right]$$

où  $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{X}|$  et  $\hat{\mathbf{q}} \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{X})/R$ .

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-4. Source sinusoïdale en temps (1/4)

Nous nous contenterons d'une approche très simple. En particulier

- Nous ne regarderons pas les problèmes de **transitoires**
- Nous ne nous inquièterons pas d'éventuels problèmes de **convergence** des intégrales de Fourier

L'outil essentiel sera la transformation de Fourier,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt.$$

L'emploi de la transformation de Fourier est justifié par le caractère **linéaire** des équations dynamiques.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-4. Source sinusoïdale en temps (2/4)

- Onde sphérique irrotationnelle (Tableau)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \left[ \frac{\phi(t - r/V_L)}{r} \right], \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\phi}(\omega) \nabla \left( \frac{e^{i\omega r/V_L}}{r} \right),$$

où  $\tilde{\phi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $\phi(t)$ .

Nous poserons  $\tilde{\phi}(\omega) = R_\phi e^{i\varphi}$ .

Le flux d'énergie transporté par l'onde, moyenné dans le temps, est

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\rho R_\phi^2 \omega^4}{2V_L r^2} \hat{x}$$

- ◇ Il s'agit bien d'un **flux positif divergent**
- ◇ Il s'agit du terme dominant, d'ordre  $\mathcal{O}(1/r^2)$  ce qui assure la **conservation de l'énergie**.
- ◇ Détail technique : bien qu'une fonction sinusoïdale soit de support infini, il n'apparaît que ce **terme propagatif**, et des termes de **champ proche** (négligés).

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-4. Source sinusoïdale en temps (3/4)

- Onde sphérique de cisaillement [Exercice]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} f \left( t - \frac{r}{V_T} \right) \right] \hat{x} \wedge \mathbf{d}, \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\phi}(\omega) \nabla \left( \frac{e^{i\omega r/V_T}}{r} \right) \hat{x} \wedge \mathbf{d}$$

Le flux d'énergie transporté par l'onde, moyenné dans le temps, est

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\rho R_\phi^2 \omega^4}{2V_T r^2} \sin^2 \theta \hat{x}$$

- ◇ Il s'agit bien d'un **flux positif divergent**
- ◇ Il s'agit du terme dominant, d'ordre  $\mathcal{O}(1/r^2)$  ce qui assure la **conservation de l'énergie**.
- ◇ Détail technique : bien qu'une fonction sinusoïdale soit de support infini, il n'apparaît que ce **terme propagatif**, et des termes de **champ proche** (négligés).

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-4. Source sinusoïdale en temps (4/4)

- Source ponctuelle sinusoïdale [Exercice]

$$\frac{\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega)}{\tilde{\phi}} = \frac{(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} e^{i\omega r/V_L}}{4\pi V_L^2 r} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{d} \wedge \hat{\mathbf{x}}) e^{i\omega r/V_T}}{4\pi V_T^2 r} + \frac{i[3(\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}]}{4\pi\omega r^2} \left[ \frac{e^{i\omega r/V_L}}{V_L} \left(1 + \frac{iV_L}{\omega r}\right) - \frac{e^{i\omega r/V_T}}{V_T} \left(1 + \frac{iV_T}{\omega r}\right) \right]$$

- ◇ En champ lointain ( $V_L/(r\omega) \ll 1$  et  $V_T/(r\omega) \ll 1$ ), le dernier terme est négligeable.
- ◇ En champ lointain l'onde est la superposition de deux ondes sphériques, une onde longitudinale et une onde transverse.
- ◇ Détail technique : bien qu'une fonction sinusoïdale soit de support infini, il n'apparaît qu'un terme propagatif, et des termes de champ proche.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (1/19)

- Oscillations radiales (1/2) (Tableau)
  - ◇ On cherche un champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u(r, t)\hat{x}$ .
  - ◇ On cherche les pulsations propres  $u(r, t) = u(r)e^{i\omega t}$
  - ◇ Ce champ est irrotationnel, donc  $\exists\phi$ ,  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  avec  $\phi(r, t)$ .
  - ◇ Le potentiel  $\phi$  vérifie

$$\Delta\phi + k_L^2\phi = 0, \quad k_L \equiv \frac{\omega}{V_L}$$

- ◇ La solution régulière à l'origine est  $\phi(r) = A\frac{\sin k_L r}{r}$
- ◇ La condition à la limite est  $T_{rr}(r = R) = 0$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (2/19)

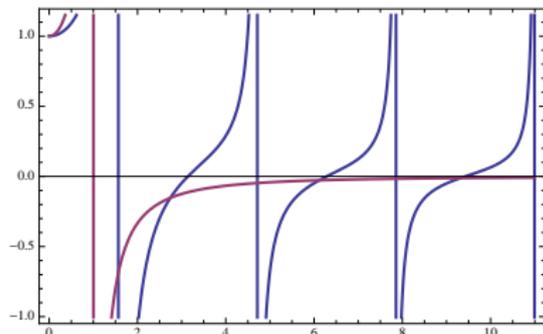
- Oscillations radiales (2/2) (Tableau)

Posons  $X \equiv k_L R$ .

Les fréquences propres sont données par

$$\frac{\tan X}{X} = \frac{1}{1 - [V_L X / (2V_T)]^2}$$

$$T_n = \frac{2\pi R}{V_L X_n}$$



Pour  $\nu = 1/3$ ,  $V_L = 2V_T$ . En prenant  $V_L$  pour le Fer (5460 m/s), et dans le cas de la Terre ( $R = 6371$  km) on trouve  $T_1 \approx 45$  mn.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (3/19)

- Éléments du calcul général. Étape 1. (Tableau)

On cherche  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ . Les équations de Navier deviennent

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Appliquons l'opérateur divergence ( $\nabla \cdot$ ) à cette équation :

$$\Delta S + k_L^2 S = 0 \quad \text{où} \quad k_L \equiv \omega/V_L$$

On montre alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{avec} \\ \mathbf{u}_1 &= -\frac{1}{k_L^2} \nabla S, \quad \Delta S + k_L^2 S = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_2 &= 0, \quad (\Delta + k_T^2) \mathbf{u}_2 = 0. \end{aligned}$$

## IV. Quelques solutions en élastodynamique

### IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (4/19)

- Séparation des variables pour un champ scalaire (1/5)

La dilatation  $S$  est par définition un **champ scalaire**, pour lequel on cherche à résoudre **l'équation de Helmholtz**,

$$\Delta S + k_L^2 S = 0,$$

dans un domaine décrit naturellement en **coordonnées sphériques**.

L'opérateur Laplacien, en coordonnées sphériques, s'écrit

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}$$

où  $\Delta_r$  ne porte que sur la variable  $r$  et  $\Delta_{\theta, \varphi}$  que sur les angles  $\theta$  et  $\phi$ .  
On procède par **séparation des variables**, en posant

$$S(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

On en déduit

$$\frac{r^2 (\Delta_r R + k_L^2 R)}{R} = -\frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y}{Y} = \alpha,$$

où  $\alpha$  est **nécessairement une constante**, car le membre de gauche n'est fonction que de  $r$  et le membre de droite que des angles  $\theta$  et  $\phi$ .

## IV. Quelques solutions en élastodynamique

### IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (5/19)

- Séparation des variables pour un champ scalaire (2/5)

On reprend la méthode de séparation des variables pour les angles

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

On en déduit

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}{\Theta(\theta)} + \alpha \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \beta$$

De même que précédemment,  $\beta$  ne peut être qu'une constante. Mais en outre on doit avoir

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \implies \beta = m^2 \quad \text{où } m \in \mathbb{Z}$$

La fonction  $\Theta$  doit être régulière pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . En effet, le choix de l'axe  $Ox_3$  est totalement arbitraire. Cette condition fixe la constante  $\alpha$ .

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (6/19)

- Séparation des variables pour un champ scalaire (3/5)

Le résultat est  $S(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  avec

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta(\theta) = 0$$

Les fonctions angulaires sont appelées **harmoniques sphériques**,

$$Y_{lm}^{(p)} = \cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), Y_{lm}^{(i)} = \sin(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), Y_{lm} = e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta),$$

où  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$ .  $P_l^m(z)$  est une fonction de Legendre qui s'exprime en fonction des polynômes de Legendre  $P_l(z)$ ,

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(z)}{dz^m}, \quad P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (z^2-1)^2}{dz^l}$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (7/19)

- Séparation des variables pour un champ scalaire (4/5)

Ces fonctions forment un système orthogonal

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \propto \delta_{mm'} \delta_{ll'}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \quad Y_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos(\theta), \quad Y_{20} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2(\theta) - 1)$$

Pour la fonction radiale  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ k_L^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0$

Posons  $R(r) = J(r)/\sqrt{r}$ , alors  $J'' + \frac{J'}{r} + \left[ k_L^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right] J = 0$

Les solutions sont les fonctions de Bessel d'ordre  $l + 1/2$ .

La fonction radiale **qui ne diverge pas en  $r = 0$**  est

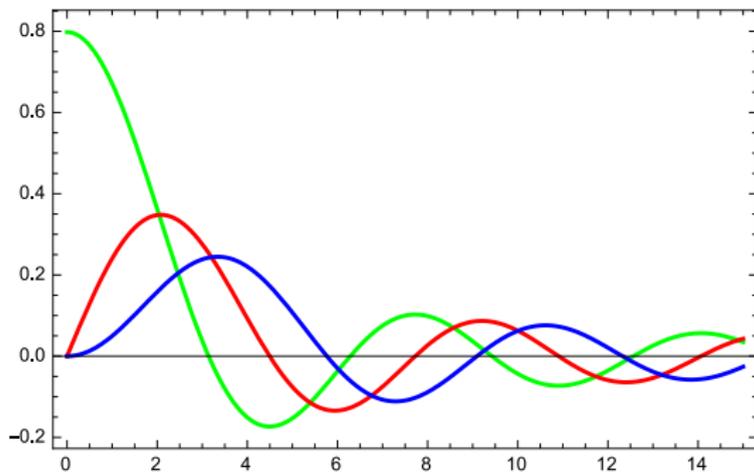
$$j_l(r) \equiv J_{l+1/2}(k_L r) / \sqrt{r}$$

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (8/19)

- Séparation des variables pour un champ scalaire (5/5)

$$\frac{J_{1/2}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{J_{3/2}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x} \right),$$
$$\frac{J_{5/2}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{3 \sin(x)}{x^3} - \frac{\sin(x)}{x} - \frac{3 \cos(x)}{x^2} \right)$$



# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (9/19)

- Séparation des variables pour un champ vectoriel (1/2)

C'est **beaucoup plus compliqué** que pour un champ scalaire!

- ◇ En premier lieu, il faut distinguer composante longitudinale et composante transverse
- ◇ Ensuite, il faut pouvoir exprimer la condition à la limite à la surface de la sphère

On construit ( $\sigma$  indexe la parité de la fonction  $Y$ )

- ◇  $\mathbf{L}_{lm}^{(\sigma)} = \frac{1}{k_L} \nabla \left[ Y_{lm}^{(\sigma)}(\theta, \varphi) j_l(k_L r) \right]$  (composante longitudinale)
- ◇  $\mathbf{M}_{lm}^{(\sigma)} = \nabla \wedge \left[ \mathbf{r} Y_{lm}^{(\sigma)}(\theta, \varphi) j_l(k_T r) \right]$  (composante transverse)
- ◇  $\mathbf{N}_{lm}^{(\sigma)} = \frac{1}{k_T} \nabla \wedge \left[ \mathbf{M}_{lm}^{(\sigma)} \right]$  (composante transverse)

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (10/19)

- Séparation des variables pour un champ vectoriel (2/2)

Il faut ensuite  $\mathbf{t}_r = T_{rr}\mathbf{e}_r + T_{r\theta}\mathbf{e}_\theta + T_{r\varphi}\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{0}$  pour  $r = R$ .

$$\mathbf{t}_r = \frac{1}{k_L} \mathbf{P}_{lm}^{(\sigma)} \left[ -\lambda k_L^2 j_l(k_L r) + 2\mu \frac{d^2}{dr^2} j_l(k_L r) \right] + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_L} \mathbf{B}_{lm}^{(\sigma)} \left[ \frac{2\mu}{r} \frac{d}{dr} j_l(k_L r) - \frac{2\mu}{r^2} j_l(k_L r) \right] \quad (\text{pour } \mathbf{L}_{lm}^{(\sigma)})$$

$$\mathbf{t}_r = \mu \sqrt{l(l+1)} \mathbf{C}_{lm}^{(\sigma)} \left[ \frac{d}{dr} j_l(k_T r) - \frac{1}{r} j_l(k_T r) \right] \quad (\text{pour } \mathbf{M}_{lm}^{(\sigma)})$$

$$\mathbf{t}_r = \frac{2\mu l(l+1)}{k_T} \mathbf{P}_{lm}^{(\sigma)} \frac{d}{dr} \left[ \frac{j_l(k_T r)}{r} \right] + \frac{\mu \sqrt{l(l+1)}}{k_T} \mathbf{B}_{lm}^{(\sigma)} \left[ \frac{d^2}{dr^2} j_l(k_T r) + \frac{l^2 + l - 2}{r^2} j_l(k_T r) \right] \quad (\text{pour } \mathbf{N}_{lm}^{(\sigma)})$$

où  $\mathbf{P}_{lm}^{(\sigma)}$ ,  $\mathbf{B}_{lm}^{(\sigma)}$  et  $\mathbf{C}_{lm}^{(\sigma)}$  sont trois vecteurs ne dépendant que de  $\theta$  et  $\varphi$ .

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (11/19)

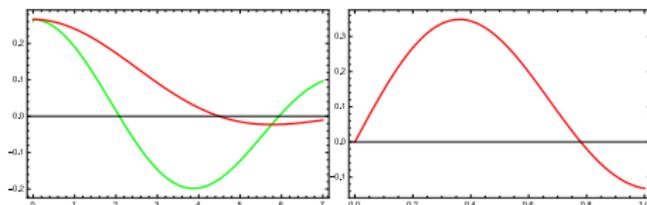
- Classification des modes d'oscillation (Horace Lamb, 1882) (1/3)

- ◇ Modes purement transverses  $\mathbf{u} = \mathbf{M}_{lm}^{(\sigma)}$ .

- ◇ Ces modes sont donnés par les solutions de

$$j_l'(X) = \frac{j_l(X)}{X}, \quad T_n = \frac{2\pi R}{V_T X_n}$$

- ◇ Pour  $l = 1$  la solution  $X_1 = 0$  représente une rotation autour de  $x_3$
- ◇ Le premier mode non nul est  $X_2 = 5.76$

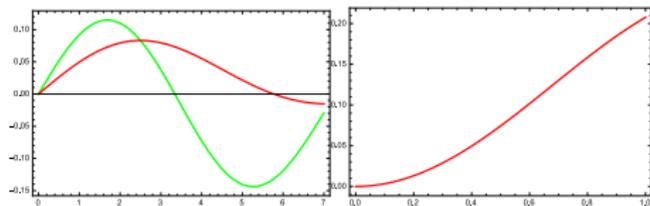


- ◇ Le déplacement est  $\mathbf{u} = \sin(\theta) j_1(X_2 r/R) \mathbf{e}_\varphi$ .
- ◇ Mode de torsion, avec extérieur et intérieur de la sphère oscillant en opposition de phase.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (12/19)

- Classification des modes d'oscillation (Horace Lamb, 1882) (2/3)
  - ◇ Pour  $l = 2$  le déplacement est  $\mathbf{u} = (3/2) \sin(2\theta) j_2(X_2 r/R) \mathbf{e}_\varphi$ .



- ◇ Pour la racine  $X = 0$  le déplacement est identiquement nul (pas de rotation)
- ◇ La fonction radiale est toujours positive.
- ◇ **Mode de torsion**, avec hémisphères nord et sud de la sphère oscillant en opposition de phase.

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (13/19)

- Classification des modes d'oscillation (Horace Lamb, 1882) (3/3)
  - ◇ Le seul mode purement longitudinal est le mode  $\mathbf{u} = \mathbf{L}_{00}^{(\sigma)}$
  - ◇ Il s'agit du mode calculé précédemment par une approche élémentaire
  - ◇ Dans le cas général il faut prendre une **combinaison linéaire** des fonctions  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{N}$  pour respecter la condition aux limites.

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_{lm}^{(\sigma)}(k_L r) + \alpha \mathbf{N}_{lm}^{(\sigma)}(k_T r)$$

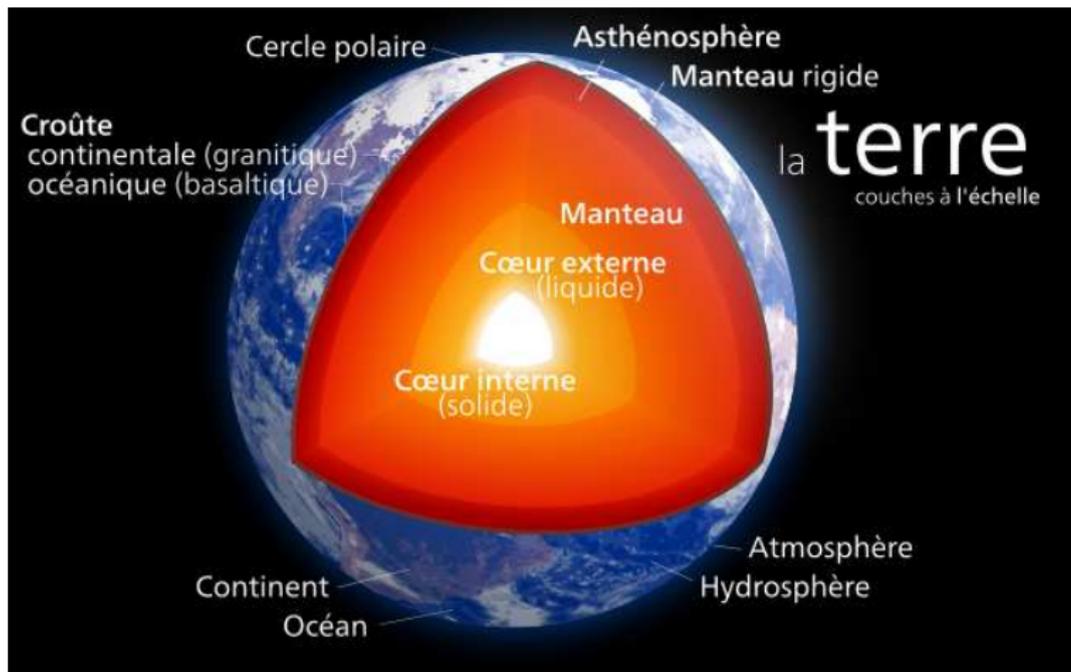
- ◇ On résout alors un système (non linéaire!) de **deux équations** (la composante portée par le vecteur  $\mathbf{P}_{lm}^{(\sigma)}$  et celle portée par le vecteur  $\mathbf{B}_{lm}^{(\sigma)}$ ) à **deux inconnues**  $\omega$  et  $\alpha$ .
- ◇ **Les conditions aux limites induisent donc un couplage entre modes longitudinaux et modes transverses!**

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (14/19)

- Application à la sismologie (1/6)

Modèle géologique de la Terre (*Wikipedia, article « Terre »*)



# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (15/19)

- Application à la sismologie (2/6)

La Terre n'est pas une sphère élastique solide !

Ce qui n'empêche pas de chercher des ordres de grandeur... Des séismes de très forte magnitude (Valdivia, Chili, 1960 et Alaska, 1964) peuvent en effet exciter **les modes propres de vibration de la Terre**

La sismologie utilise l'observation de ces modes pour identifier des **structures à grande échelle** à l'intérieur de la Terre. (Voir *Wikipedia*, *Free oscillations of the Earth*)

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (16/19)

- Application à la sismologie (3/6)

La classification des modes utilise les indices  $n$ ,  $l$  et  $m$

- ◇  $l$  est le nombre angulaire, correspondant à l'ordre de l'harmonique sphérique
- ◇  $m$  est le nombre azimuthal,  $-l \leq m \leq l$
- ◇  $n$  est le nombre radial, il correspond au nombre de zéros de  $R_n(r)$
- ◇ Si la Terre est considérée comme parfaitement sphérique (ce qui est faux, elle est aplatie aux pôles) les périodes d'oscillation sont indépendantes de  $m$ .
- ◇ On note les modes  ${}_n S_l$  (dans cette approximation !)

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (17/19)

- Application à la sismologie (4/6)

La classification des modes propres de la Terre recoupe la classification de Lamb

- ◇ Les modes transverses sont appelés **modes toroïdaux**, notés  ${}_nT_l$ 
  - ▶ Le mode  ${}_0T_1$  correspond à un changement de vitesse de rotation de la Terre. Cet effet existe, mais il est bien entendu très faible !
  - ▶ Le mode  ${}_0T_2$  correspond à une torsion du globe Terrestre, l'hémisphère sud et l'hémisphère nord oscillant en opposition de phase. Il a une période d'environ 44 mn.
- ◇ Les autres modes sont appelés **modes sphéroïdaux**, notés  ${}_nS_l$ 
  - ▶ Le mode de **respiration**  ${}_0S_0$ , celui que nous avons calculé, a une période de 20 mn
  - ▶ Le mode  ${}_0S_1$  ne peut pas être observé (voir plus loin)
  - ▶ Le mode en ballon de rugby  ${}_0S_2$  a une période d'environ 54 mn

# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (18/19)

- Application à la sismologie (5/6)

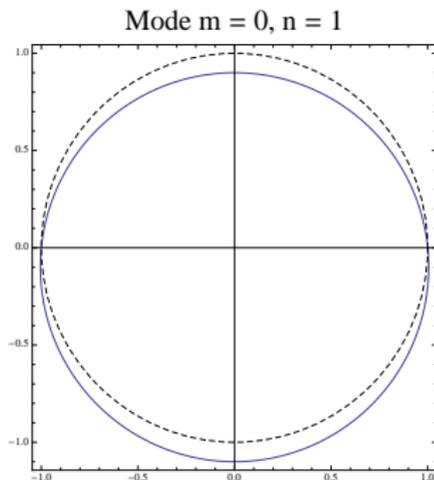
Impossibilité du mode  ${}_0S_1$  :

Pour  $l = 1$   $P_1(z) = z$  et donc  $\Theta_1(\theta) = \cos \theta$ .  
Donc  $S(r, \theta) = R(r) \cos \theta$ , et

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{1}{k_L^2} \begin{pmatrix} R' \cos \theta \\ -R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci-contre la déformation de la Terre :

Cette déformation implique un déplacement du centre de gravité :  
exclu sans force extérieure !



# IV. Quelques solutions en élastodynamique

## IV-5. Oscillations d'une sphère élastique homogène (19/19)

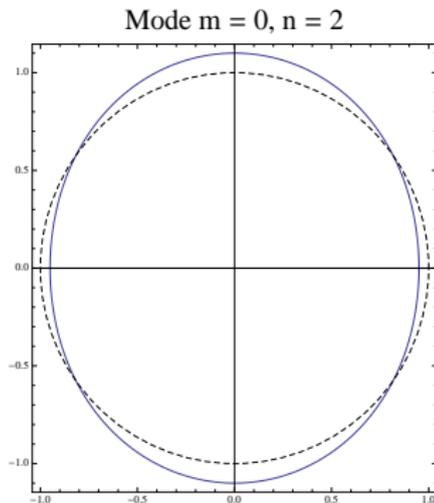
- Application à la sismologie (6/6)

Forme du mode  ${}_0S_2$ , en ballon de rugby :

Pour  $l = 2$

$$P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1), \Theta_2(\theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Ci-contre la déformation de la Terre correspondante :



- 1 Diffusion de spin
- 2 Digression : Comportement à haute fréquence
- 3 Transition para-ferromagnétique
- 4 Ondes de spins
- 5 Fluides Newtoniens
- 6 Solides isotropes

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-1 Diffusion de spins (1/4)

Modèle : Liquide de particules de spin  $1/2$ , interagissant par un potentiel ne dépendant que de leur distance (cas de  $\text{He}^3$  liquide).

En un point  $\mathbf{x}$  et au temps  $t$ , il y a une densité  $n_+(\mathbf{x}, t)$  [resp.  $n_-(\mathbf{x}, t)$ ] particules de spin  $+1/2$  (resp. de spin  $-1/2$ ), et l'aimantation est

$$M(\mathbf{x}, t) = \mu_B [n_+(\mathbf{x}, t) - n_-(\mathbf{x}, t)]$$

où  $\mu_B$  est le moment magnétique d'un spin.

L'aimantation est donc une quantité conservée localement, tout comme la masse :

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}^M(\mathbf{x}, t) = 0.$$

À l'équilibre,  $n_+$  et  $n_-$  sont uniformes. Donc phénoménologiquement

$$\langle \mathbf{J}^M(\mathbf{x}, t) \rangle = -D \nabla \langle M(\mathbf{x}, t) \rangle$$

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-1 Diffusion de spins (2/4)

- $D$  est le **coefficient de diffusion de spins**
- Il est **positif** pour rendre compte de l'uniformisation de  $n_+$  et  $n_-$  à l'équilibre
- L'équation qui le définit n'est vraie qu'en moyenne statistique

On obtient donc une **équation de diffusion** :

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} - D \nabla^2 \langle M \rangle = 0$$

Il est intéressant d'opérer une **transformation de Fourier spatiale** et une transformation de Laplace temporelle

$$M(\mathbf{k}, t) = \int dV e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} M(\mathbf{x}, t), \quad M(\mathbf{k}, z) = \int_0^\infty dt e^{itz} M(\mathbf{k}, t)$$

$$\left( \text{parfois } \mathcal{L}[f] \equiv \int_0^\infty dt e^{-st} f(t), \text{ soit } s \leftrightarrow -iz \right)$$

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-1 Diffusion de spins (3/4)

On trouve

$$\langle M(\mathbf{k}, z) \rangle = \frac{1}{z + iDk^2} \langle M(\mathbf{k}, t = 0) \rangle$$

Un pôle imaginaire pur  $z = -iDk^2$  est la signature d'une équation de diffusion.

Par transformation de Laplace inverse

$$\langle M(\mathbf{k}, t) \rangle = e^{-Dk^2 t} \langle M(\mathbf{k}, t = 0) \rangle$$

qui fait apparaître un temps caractéristique

$$\tau(k) = \frac{1}{Dk^2} \quad \text{tel que} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \tau(k) = +\infty.$$

Le temps caractéristique de transport de l'aimantation **diverge à grande longueur d'onde** : C'est la définition d'un **mode hydrodynamique**.

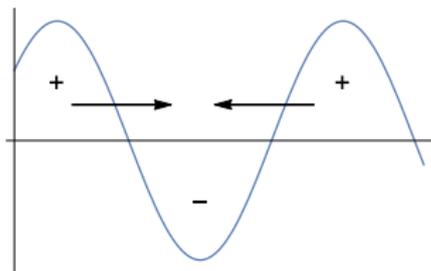
# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-1 Diffusion de spins (4/4)

L'aimantation ne décroît pas sur une échelle de temps microscopique car c'est une **quantité conservée**.

Une fluctuation ne peut pas disparaître localement, mais en diffusant dans tout l'espace.

Pour une marche au hasard  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = Dt$  soit  $\tau \sim \lambda^2/D$



Par transformée de Fourier inverse, avec  $\langle M(\mathbf{x}, t = 0) \rangle = M \delta(\mathbf{x})$ ,

$$\langle M(\mathbf{x}, t = 0) \rangle = \frac{M}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{Dt}\right)$$

**Une loi de conservation  $\iff$  un mode hydrodynamique**

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-2 Digression : Comportement à haute fréquence (1/3)

À haute fréquence, le courant ne peut plus suivre instantanément les fluctuations spatiales de  $\langle M(\mathbf{x}, t) \rangle$ .

$$\langle \mathbf{J}^M(\mathbf{x}, t) \rangle = - \int_0^t dt' D(t-t') \nabla \langle M(\mathbf{x}, t') \rangle,$$

qui redonne le cas précédent si  $D(t-t') = D\delta(t-t')$ .

Supposons  $D(t-t')$  décrit par un **temps de relaxation**  $\tau$ ,

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} - \nabla \cdot \int_0^t dt' \frac{D}{\tau} e^{-(t-t')/\tau} \nabla \langle M(\mathbf{x}, t') \rangle = 0$$

Les transformations de Fourier et Laplace donnent

$$\langle M(\mathbf{k}, z) \rangle = \frac{i}{z + iDk^2/(1 - iz\tau)} \langle M(\mathbf{k}, t=0) \rangle,$$

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-2 Digression : Comportement à haute fréquence (2/3)

À basse fréquence,  $z\tau \ll 1$ , on retrouve le cas précédent.

À haute fréquence,  $z\tau \gg 1$ ,

$$\langle M(\mathbf{k}, z) \rangle = \frac{iz}{z^2 - k^2 D/\tau} \langle M(\mathbf{k}, t = 0) \rangle$$

soit deux pôles réels  $z = \pm k\sqrt{D/\tau}$ . Or si  $\langle (\partial M/\partial t)(\mathbf{k}, t = 0) \rangle = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 \langle M \rangle}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \langle M \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle M(\mathbf{k}, z) \rangle = \frac{iz}{z^2 - k^2 c^2} \langle M(\mathbf{k}, t = 0) \rangle$$

Une paire de pôles réels est la signature  
d'une équation de propagation.

À haute fréquence, le comportement est  
propagatif  
et non plus diffusif!

Nombreux exemples pratiques :

- De la science amusante

<https://www.youtube.com/watch?v=8H9sXSQu9ck>

- Moins amusant : cela explique pourquoi on se tue si on tombe en mer sans parachute !

- Regardons en détail l'écoulement d'un glacier. Soit  $\eta$  la viscosité de la glace,  $\rho$  sa densité et  $V_T$  la vitesse des ondes transverses.

Pour estimer  $\eta$ , égalons contraintes visqueuses et force de

$$\text{pesanteur : } \rho g H^3 \sim \eta \frac{U}{H} H^2 \quad \implies \quad \frac{\eta}{\rho} \sim \frac{g H^2}{U}, \text{ où } H \text{ est}$$

l'épaisseur du glacier et  $U$  sa vitesse.

Typiquement  $U \sim 1$  km/an,  $H \sim 10$  m, et  $V_T \sim 10^3$  m/s. On trouve  $\tau \sim 10^4$  s soit de l'ordre de la journée.

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-3 Rappel : Ferromagnétisme (1/2)

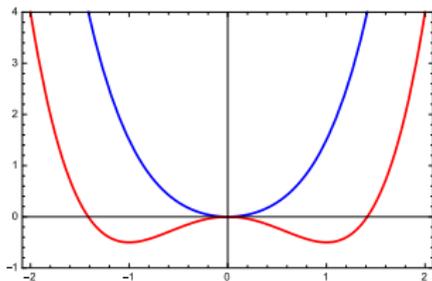
En l'absence de champ magnétique extérieur, certains corps (fer, cobalt, nickel, par exemple) dits **ferromagnétiques** présentent à l'équilibre thermodynamique une **aimantation non nulle** (et constituent ainsi des aimants permanents).

Ils perdent cette propriété lorsque leur température dépasse une **température critique  $T_C$**  appelée aussi température de Curie. (1 043 K pour le fer, 1 388 K pour le cobalt, 627 K pour le nickel).

Dans le **modèle de Landau**, la transition est décrite par une énergie libre

$$G(T, |\mathbf{M}|) = a(T - T_C)|\mathbf{M}|^2 + \frac{\beta}{2}|\mathbf{M}|^4, \quad a > 0 \text{ \& } \beta > 0$$

—  $T > T_C$  —  $T < T_C$



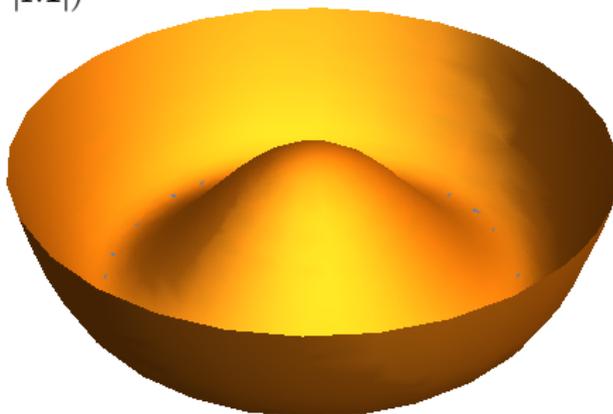
Pour  $T < T_C$ , le minimum d'énergie libre est  $|\mathbf{M}| \neq 0$

$|\mathbf{M}|$  est le **paramètre d'ordre** de la transition.

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-3 Rappel : Ferromagnétisme (2/2)

Le point crucial est que l'énergie libre est invariante par rotation (elle ne dépend que de  $|\mathbf{M}|$ )



Toutes les orientations de  $\mathbf{M}$  sont possibles, du moment que sa norme donne l'énergie libre minimale

L'état d'équilibre réalise une seule orientation :

il y a brisure spontanée d'une *symétrie continue*

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-4 Ondes de spin (1/3)

Modèle : Chaîne de spins  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$  et interactions entre plus proches voisins  $-2J \sum \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_{p+1}$

Le Hamiltonien est invariant par rotation, et l'état d'équilibre brise spontanément cette symétrie.

Le spin  $p$  contribue à

$$-2J\mathbf{S}_p \cdot (\mathbf{S}_{p+1} + \mathbf{S}_{p-1}) = -\mathbf{m}_p \cdot \mathbf{B}_p$$

où

$$\mathbf{m}_p \equiv -\mu_B \mathbf{S}_p \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_p \equiv -\frac{2J}{\mu_B} (\mathbf{S}_{p+1} + \mathbf{S}_{p-1})$$

Alors, en prenant une équation de mouvement classique pour le spin,

$$\hbar \frac{d\mathbf{S}_p}{dt} = \mathbf{m}_p \wedge \mathbf{B}_p$$

Supposons les spins orientés selon  $Ox_3$ .  $S_3 \approx \langle |S| \rangle \equiv S$ ,  $S_1 \ll S$ ,  $S_2 \ll S$

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-4 Ondes de spin (2/3)

En linéarisant,

$$\begin{cases} \dot{S}_p^1 = (2JS/\hbar) (2S_p^2 - S_{p-1}^2 - S_{p+1}^2) \\ \dot{S}_p^2 = (2JS/\hbar) (-2S_p^1 + S_{p-1}^1 + S_{p+1}^1) \end{cases}$$

Si on pose  $S_p^{1,2} \equiv A_{1,2} e^{i(pka - \omega t)}$  où  $a$  est la maille du réseau,

$$\begin{cases} -i\omega A_1 = (2JS/\hbar) A_2 (2 - e^{-ika} - e^{ika}) \\ -i\omega A_2 = (2JS/\hbar) A_1 (-2 + e^{-ika} + e^{ika}) \end{cases}$$

d'où on déduit la relation de dispersion

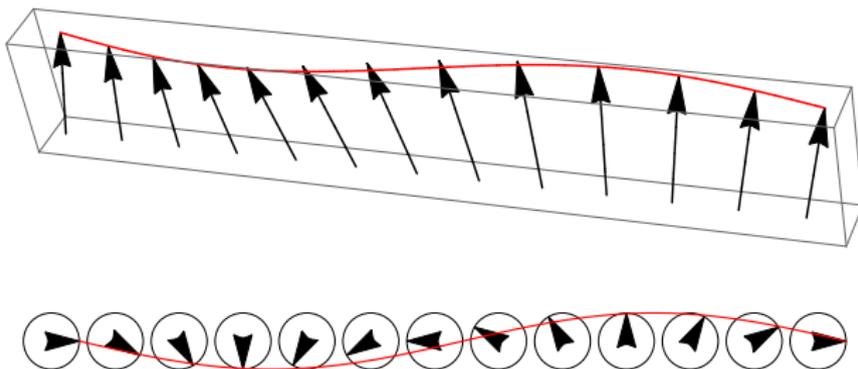
$$\hbar\omega = 4JS(1 - \cos ka) \approx 2JSa^2 k^2 \quad \text{pour } ka \ll 1.$$

On retrouve  $\lim_{k \rightarrow 0} \omega(k) = 0$

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-4 Ondes de spin (3/3)

Localement, du fait de l'**invariance par rotation**, la force de rappel n'est due qu'à la très faible différence d'orientation des spins les uns par rapport aux autres. Quand l'**état d'équilibre brise une symétrie continue**, les **fluctuations du paramètre d'ordre** constituent un mode hydrodynamique dit **mode de Goldstone**.



Attention ! Dans le cadre de la **réponse linéaire** !

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \nabla_i v_i = 0 & \text{(conservation de la masse)} \\ \partial_t v_i + \nabla_i \delta p = \eta_{ijkl} \nabla_l \nabla_j v_k & \text{(conservation de la quantité de mouvement)} \\ \partial_t E + \nabla_i J_i^E = 0 & \text{(conservation de l'énergie)} \end{cases}$$

1 + 3 + 1 soit 5 équations de conservation.

5 modes hydrodynamiques :

- 2 modes de propagation du son,  $\omega = \pm c_S k$
- 2 modes de cisaillement diffusifs, de polarisations orthogonales
- 1 mode de diffusion de la chaleur

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-6 Solides isotropes (1/4)

Par rapport à un liquide, les atomes d'un solide occupent une position définie dans l'espace. L'état d'équilibre d'un solide **brise l'invariance par translation** dans les trois directions de l'espace.

**Il apparaît donc trois modes de Goldstone !**

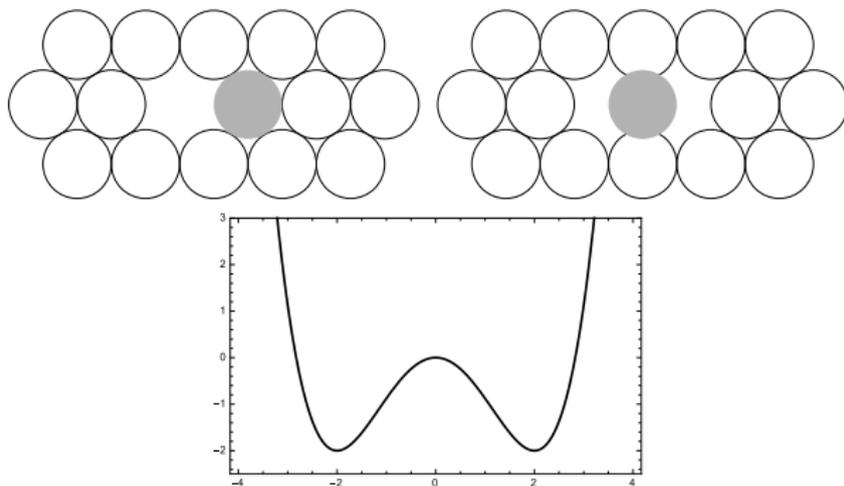
5 + 3 soit 8 modes hydrodynamiques :

- 2 modes de propagation acoustique longitudinale,  $\omega = \pm V_L k$
- 4 modes de propagation acoustique transverses,  $\omega = \pm V_T k$ , pour deux polarisations orthogonales
- 1 mode de diffusion de la chaleur
- **Il en manque un ?**

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-6 Solides isotropes (2/4)

Il s'agit d'un mode de **diffusion de lacunes**



La molécule grisée peut traverser le puits de potentiel par effet tunnel.  
Comportement diffusif!

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-6 Solides isotropes (3/4)

S'il y a des lacunes, la **masse volumique va dépendre de la déformation.**

Soit  $N_S$  le nombre de sites du réseau cristallin,  $N_L$  le nombre de lacunes,  $V$  le volume du solide.

- Nombre total d'atomes :  $N = N_S - N_L$
- Densité d'atomes  $n = N/V$
- Volume de la cellule unité du réseau  $\Omega_0 = V/N_S$
- Densité de lacunes  $n_L = N_L/V$

$$n = \Omega_0^{-1} - n_L \quad \Longrightarrow \quad \Omega_0 \delta n = -u_{ii} - \Omega_0 \delta n_L \quad \text{car} \quad u_{ii} = \frac{\delta \Omega_0}{\Omega_0}$$

et l'équation  $u_{ii} = \delta V/V$  n'est plus vraie !

# V. Fluctuations hydrodynamiques et symétries brisées

## V-6 Solides isotropes (4/4)

Equations du mouvement : (8 modes hydrodynamiques)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho \nabla_i v_i = 0 & \text{(conservation de la masse)} \\ \partial_t v_i + \nabla_i \delta p - \nabla_j \phi_{ji} = 0 & \text{(conservation de la quantité de mouvement)} \\ \partial_t E + \nabla_i J_i^E = 0 & \text{(conservation de l'énergie)} \\ \partial_t u_i - v_i = \chi \nabla_j \phi_{ji} & \text{(diffusion des lacunes)} \end{cases}$$

On retrouve les équations de Navier si

$$\delta p = -K u_{ll}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \phi_{ij} = 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ij} \right)$$

La dernière équation montre que  $\partial_t u_i \neq v_i$  à cause de la diffusion des lacunes.

- $\nabla \cdot (U \mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U \nabla \cdot \mathbf{A}$
- $\nabla \wedge (U \mathbf{A}) = (\nabla U) \wedge \mathbf{A} + U(\nabla \wedge \mathbf{A})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B})$
- $\nabla \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
- $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})$
- $\nabla \wedge (\nabla U) = \mathbf{0}$
- $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$
- $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$